Akademie van Wetenschappen. Afd
ing Natuurkunde
Verhandelingen.

(2)

REGLEMENTEN VAN ORDE

DER

BEIDE AFDEELINGEN

VAN DE

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN,

GEVESTIGD TE AMSTERDAM,

EN

ALGEMEENE BEPALINGEN.

deel 2

[1855]

REGLEMENT VAN ORDE,

VOOR DE

AFDEELING

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN.

WERKZAAMHEDEN DER LEDEN.

§ 1.

De gewone Vergaderingen der Afdeeling worden, met uitzondering der maanden Julij en Augustus, gehouden op den laatsten Zaturdag van elke maand.

§ 2.

De leden der Afdeeling Taal-, Letter-, Geschiedkundige en Wijsgeerige Wetenschappen, de gewone Vergaderingen der Afdeeling Wis- en Natuurkundige Wetenschappen bijwonende, hebben regt op vergoeding van reis- en verblijfkosten.

Elk lid der Akademie ontvangt, ten minste vier dagen vóór de gewone Vergaderingen van elke Afdeeling, een brief van uitnoodiging, waarin zooveel mogelijk de onderwerpen worden vermeld, die behandeld zullen worden.

§ 3.

De gewone Vergaderingen worden op het in den brief van beschrijving vermelde en door den Voorzitter bepaalde uur geopend en uiterlijk te 3 ure gesloten.

Mogt de Vergadering verlenging dezer termijn verlangen, dan is de Voorzitter geregtigd haar te verlengen.

§ 4.

De werkzaamheden der gewone Vergaderingen zijn:

1°. het doen van Verslag over zaken, waaromtrent de Regering den raad der Afdeeling moge hebben ingewonnen;

2°. beraadslaging over Voorstellen aan de Regering, betreffende de belangen der wetenschap;

3°. het aanhooren *van* en beraadslagen *over* mededeelingen en voorstellen, betreffende onderwerpen van wetenschap.

Tot dit laatste doel wordt jaarlijks in de buitengewone Vergadering van April een rooster vastgesteld van de spreekbeurten, zoo als die achtereenvolgend in de gewone Vergaderingen der Akademie door de gewone leden zullen worden vervuld. Het ontwerp van den rooster wordt in den beschrijvingsbrief tot de buitengewone Vergadering van April aan de leden bekend gemaakt.

Voor elke gewone Vergadering worden ten minste drie sprekers aangewezen.

Het staat elk lid vrij, ook buiten dergelijke aanwijzing, eene voordragt in de Vergadering te houden. De tijd, voor elke spreekbeurt beschikbaar, is bepaald op een half uur.

De namen der sprekers worden in den beschrijvingsbrief en in de openlijke aankondiging der Vergadering bekend gemaakt.

§ 5.

De Afdeeling geeft uit:

1°. *Verhandelingen* in 4°.

2°. *Verslagen en Mededeelingen* in 8°.

In deze laatste worden opgenomen de Processen-verbaal der gewone Vergaderingen, alsmede zoodanige medegedeelde stukken, die bepaald door den schrijver daartoe zijn aangewezen, of waaraan de Afdeeling zoodanige bestemming wenscht te geven.

Tot dergelijke mededeelingen zijn, behalve de leden, ook personen geregtigd, niet door het lidmaatschap aan de Akademie verbonden.

§ 6.

Stukken, bestemd voor de *Verhandelingen*, worden in handen gesteld eener Commissie van ten minste twee leden, die binnen eenen bij de benoeming vastgestelden tijd verslag uitbrengt, op het in hare handen gestelde stuk. Het indienen van het verslag, de deliberatiën en het besluit omtrent de aanneming geschieden in den regel in eene gewone Vergadering. Op praeadvies van den President en Secretaris kan zulks ook in eene buitengewone Vergadering plaats hebben.

§ 7.

Zoo de aangeboden Verhandeling voor de *Verslagen en Mededeelingen* bestemd is, wordt zij in handen gesteld van eene Commissie van redactie, benoemd in de buitengewone Vergadering der maand April, en bestaande, behalve uit den Secretaris, ambtshalve lid dezer Commissie, uit vier leden, waarvan elk jaar twee aftreden, maar terstond weder verkiesbaar zijn. Zij is gemagtigd de stukken, die door haar goedgekeurd worden, in de *Verslagen en Mededeelingen* te plaatsen. Bijaldien haar oordeel afkeurend is, geeft zij daarvan in eene buitengewone Vergadering berigt, en wordt aan de leden de beslissing overgelaten.

§ 8.

Elk lid der Akademie ontvangt de *Verhandelingen* en de *Verslagen en Mededeelingen*, dadelijk na hun verschijnen.

Beide worden in den boekhandel gebragt, en elke Verhandeling wordt afzonderlijk verkrijgbaar gesteld.

De schrijvers hebben aanspraak op vijf en twintig afzonderlijke exemplaren hunner Verhandeling.

§ 9.

Zoo door eenig Departement van 's lands Regering de voorlichting der Akademie verlangd wordt, benoemt de Voorzitter eene Commissie, bestaande uit zooveel leden, als hem wenschelijk zal voorkomen, ten einde daarop, binnen eenen bij de benoeming vastgestelden tijd, de Akademie te dienen van berigt, voorlichting en raad.

De Commissie wordt in den regel benoemd in eene gewone Vergadering. In spoed eischende gevallen, als ook zoo daartoe andere redenen mogten bestaan, wordt de Commissie in eene buitengewone Vergadering of door den Voorzitter, buiten den tijd der Vergaderingen, benoemd.

Het verslag der Commissie wordt in eene gewone Vergadering voorgedragen.

Indien er bezwaren bestaan tegen de behandeling in het openbaar, kan zulks ook in eene buitengewone Vergadering geschieden.

§ 10.

De Akademie verklaart zich niet over de waarde van eenig haar ter beoordeeling toegezonden boekwerk, tenzij daartoe door de Regering uitgenoodigd, of wanneer het boekwerk haar ter mededinging naar eenen uitgeloofden prijs wordt toegezonden.

§ 11.

Zoo eenig lid mogt verlangen, dat eene bepaalde prijsvraag door de Akademie wierd uitgeschreven, is hij gehouden haar in de maand Januarij aan den Secretaris der Afdeeling schriftelijk op te geven, die haar aan de leden bekend maakt.

De beraadslaging daarover heeft plaats in de Vergadering der maand Maart.

Ingeval van goedkeuring door de Afdeeling wordt, na gehouden overleg met het algemeen Bestuur, voor zooveel de regeling der uitgaven betreft, in de algemeene Vergadering kennis gegeven van de prijs-uitschrijving der Afdeeling.

§ 12.

Op onbepaa ,den worden met gesloten deuren buitengewone Vergaderingen gehouden, waartoe alleen de leden der Afdeeling worden opgeroepen. De Voor-

zitter is geregtigd, onmiddellijk vóór of na eene gewone Vergadering eene buitengewone te beleggen. Bijaldien eene buitengewone Vergadering beschreven wordt, zullen de onderwerpen ter behandeling in den beschrijvingsbrief worden vermeld.

§ 13.

Van de gewone en buitengewone Vergaderingen wordt het Proces-verbaal, vóór hare sluiting in kort ontwerp gelezen en goedgekeurd, daarna in zijne uitbreiding vastgesteld in eene volgende Vergadering, en dat van de gewone Vergadering zoo spoedig mogelijk in de *Verslagen en Mededeelingen* uitgegeven.

De gedrukte Processen-verbaal der buitengewone Vergaderingen worden alleen aan de leden der Akademie, als ook aan de Departementen van 's lands Regering gezonden. Zij worden niet in den boekhandel gebragt.

§ 14.

In alle gevallen van stemming geschiedt de beslissing bij volstrekte meerderheid.

Bij staking van stemmen beslist de stem van den Voorzitter.

Ter bepaling van de rangorde der stemming wordt tot grondslag genomen de presentie-lijst, op welke iedere naam een nummer heeft. Volgens het lot wordt in elke Vergadering beslist, bij welk nummer de stemming zal aanvangen.

De leden der Afdeeling voor de Taal, Letter-, Geschiedkundige en Wijsgeerige Wetenschappen en de correspondenten der Afdeeling voor de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen, in eene gewone Vergadering tegenwoordig, hebben eene raadgevende stem.

§ 15.

Zoo de stemming de keuze van personen betreft, geschiedt zij met toegevouwen stembriefjes. Indien bij eene eerste stemming geene volstrekte meerderheid verkregen is, heeft er eene tweede vrije stemming plaats.

Bij de derde stemming is men gebonden aan de twee personen, die bij de tweede vrije stemming de meeste stemmen op zich vereenigd hebben. De volstrekte meerderheid beslist. Bij gelijkstaande stemmen beslist het lot.

§ 16.

Tot de verkiezing van leden wordt in eene daartoe beschreven buitengewone Vergadering der maand Maart beraadslaagd over de vraag, of eene openstaande plaats zal worden vervuld. Daarna wordt bij volstrekte meerderheid van stemmen eene lijst opgemaakt van Candidaten, wier aanspraken op het lidmaatschap door de leden der Afdeeling overwogen worden. Uit deze lijst geschiedt de keuze in de daartoe volgens Art. 7 van het Organiek Reglement, beschreven buitengewone Vergadering der maand April.

§ 17.

Zoo een lid der Afdeeling eenig Voorstel, de Akademie betreffende, in de vereenigde Vergadering van April ter beraadslaging wenscht te brengen, is hij gehouden het aan den Voorzitter der Afdeeling zoodanig tijdig in te zenden, dat het in eene daartoe beschreven buitengewone Vergadering op den laatsten Zaturdag der maand Maart, ter beraadslaging zal kunnen worden gebragt. Na goedkeuring der Afdeeling wordt het door den Voorzitter aan het Bestuur der Akademie medegedeeld, en aan zijn oordeel, volgens § 31 onderworpen.

§ 18.

In de buitengewoone Vergadering van den laatsten Zaturdag der maand Maart worden twee leden benoemd, om, vereenigd met twee leden der Letterkundige Afdeeling, eene Commissie uit te maken, aan welke, volgens § 37 de Rekening en Verantwoording van den Algemeenen Secretaris ter beoordeeling wordt gegeven.

VOORZITTER EN ONDER-VOORZITTER.

§ 19

De Voorzitter leidt de beraadslaging in de Vergaderingen, en handhaaft hare orde, volgens hetgeen daaromtrent in § 1, 3, 4, 9, 14, 15 en 16 is vastgesteld. In de orde der stemming brengt hij zijne stem het laatste uit.

§ 20.

De Voorzitter volgt bij de leiding der handelingen van de Vergadering *bij voorkeur* de volgende orde:

1o. lezing van het Proces-verbaal der voorgaande Vergadering, dat, na goedkeuring, door den Voorzitter en den Secretaris geteekend wordt;
2o. kennisgeving van ingekomen stukken en boekwerken;
3o. aanvragen van Regerings wege;
4o. voorstellen van leden;
5o. mededeelingen van Correspondenten en aanvragen van personen, door geen titel aan de Akademie verbonden;
6o. spreekbeurten en wetenschappelijke mededeelingen van ter Vergadering aanwezige leden;
7o. laatste omvraag;
8o. lezing en goedkeuring van de korte aanteekeningen van het verhandelde.

§ 21.

Zoo de Voorzitter verhinderd wordt de leiding der Vergadering op zich te nemen, geeft hij daarvan kennis aan den Onder-Voorzitter en aan den Secretaris.

De Onder-Voorzitter vervangt, bij ontstentenis, den Voorzitter, en treedt in alle zijne regten en verpligtingen.

SECRETARIS.

§ 22.

De Secretaris zorgt, dat eene aankondiging van elke gewone Vergadering ter plaatsing in de *Nederlandsche Staats-Courant* en in de *Amsterdamsche Courant* tijdig worde opgezonden.

§ 23.

Hij is belast met de uitgave, de verzending en de bewaring van al hetgeen door de Afdeeling in het licht wordt gegeven.

§ 24.

Alle verslagen en brieven der Afdeeling worden door hem geteekend.

§ 25.

De Secretaris brengt al wat hij voor de Afdeeling ontvangt ter kennisse van den Voorzitter.

§ 26.

De Secretaris geeft nimmer eenig stuk uit het Archief der Afdeeling, zonder behoorlijk bewijs van ontvangst. Dergelijke afgifte kan alleen door leden gevorderd worden.

§ 27.

De Secretaris zorgt, dat zoodra de Boekwerken, welke door de Afdeeling uitgegeven worden, zijn afgedrukt, exemplaren daarvan den Algemeenen Secretaris worden ter hand gesteld, volgens § 42.

Goedgekeurd,
's Gravenhage den 6[den] *November* 1855.
De Minister van Binnenlandsche Zaken,
VAN REENEN.

REGLEMENT VAN ORDE

VOOR DE

AFDEELING

TAAL-, LETTER-, GESCHIEDKUNDIGE EN WIJSGEERIGE WETENSCHAPPEN.

WERKZAAMHEDEN DER LEDEN.

§ 1.

De gewone Vergaderingen der Afdeeling worden, met uitzondering der maanden Julij en Augustus, gehouden op den tweeden Maandag van elke maand.

§ 2.

De leden der Afdeeling voor de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen, de gewone Vergaderingen der andere Afdeeling bijwonende, hebben regt op vergoeding van reis- en verblijfkosten.

Elk lid der Akademie ontvangt, ten minste vier dagen vóór de gewone Vergaderingen van elke Afdeeling, een brief van uitnoodiging, waarin zoo veel mogelijk de onderwerpen worden vermeld, die behandeld zullen worden.

§ 3.

De gewone Vergaderingen worden op het in den brief van beschrijving vermelde en door den Voorzitter bepaalde uur geopend, en uiterlijk te drie ure gesloten.

Wanneer er na de gewone nog eene buitengewone Vergadering moet gehouden worden, zal de eerste een uur vroeger worden gesloten.

§ 4.

De werkzaamheden der gewone Vergaderingen zijn:

1°. het doen van Verslag over zaken, waaromtrent de Regering den raad der Afdeeling mogt hebben ingewonnen;

2°. beraadslaging over voorstellen aan de Regering, betreffende de belangen der wetenschappen;

3°. het aanhooren *van* en beraadslagen *over* mededeelingen en voorstellen, betreffende onderwerpen van wetenschap.

§ 5.

De Afdeeling geeft uit:

1°. *Verhandelingen* in 4°.

2°. *Verslagen en Mededeelingen* in 8°.

In deze laatste worden opgenomen de Processen-verbaal der gewone vergaderingen, en zoodanige stukken, als, hetzij door leden der Akademie, hetzij door personen niet aan de Akademie verbonden, daartoe met goedkeuring der Vergadering aangewezen worden.

§ 6.

Stukken, bestemd voor de *Verhandelingen*, worden in handen gesteld eener commissie van ten minste twee leden, die binnen eenen vastgestelden tijd verslag uitbrengt. Het uitbrengen van het verslag, de beraadslaging en het besluit omtrent de aanneming geschieden in eene gewone vergadering. Op advies van den President en Secretaris kan zulks ook in eene buitengewone vergadering plaats hebben.

§ 7.

Stukken bestemd voor de *Verslagen en Mededeelingen* worden in handen gesteld eener Commissie van redactie, benoemd in de buitengewone vergadering der maand April, en bestaande, behalve uit den Secretaris, ambtshalve lid der Commissie, uit vier leden, waarvan elk jaar twee aftreden, welke echter terstond weder verkiesbaar zijn. Zij is tot de plaatsing der stukken in de *Verslagen en Mededeelingen* bevoegd. Mogt zij daarin eenig bezwaar vinden, dan geeft zij daarvan in eene buitengewone vergadering berigt, en wordt aan de leden de beslissing overgelaten.

§ 8.

Elk lid der Akademie ontvangt een afdruk van al wat door de Afdeeling wordt in het licht gezonden.

§ 9.

Zoo van wege eenig Departement van Algemeen Bestuur de voorlichting der Afdeeling verlangd wordt, benoemt de Voorzitter eene Commissie, bestaande uit zoo veel leden als hem wenschelijk zal voorkomen, ten einde daarop binnen een bij de benoeming vastgestelden tijd de Afdeeling te dienen van berigt, voorlichting en raad.

Het verslag der Commissie wordt in eene gewone Vergadering voorgedragen.

Indien er bezwaren bestaan tegen de behandeling in het openbaar, kan zulks ook in eene buitengewone Vergadering geschieden.

§ 10.

De Akademie verklaart zich niet over de waarde van eenig haar ter beoordeeling toegezonden boekwerk, tenzij daartoe door de Regering uitgenoodigd, of wanneer het boekwerk haar ter mededinging naar een uitgeloofden prijs wordt toegezonden.

§ 11.

Zoo eenig lid mogt verlangen, dat eene bepaalde prijsvraag door de Akademie wierd uitgeschreven, is hij gehouden haar in de maand Januarij aan den Secretaris der Afdeeling schriftelijk op te geven, die haar aan de leden bekend maakt.

De beraadslaging daarover heeft plaats in de Vergadering der maand Maart.

Ingeval van goedkeuring door de Afdeeling, wordt, na gehouden overleg met het algemeen Bestuur, voor zooveel de regeling der uitgaven betreft, in de algemeene Vergadering kennis gegeven van de prijsuitschrijving der Afdeeling.

§ 12.

Op onbepaalde tijden worden met gesloten deuren buitengewone Vergaderingen gehouden, waartoe alleen de leden der Afdeeling worden opgeroepen. De Voorzitter is geregtigd onmiddellijk vóór of na eene gewone Vergadering eene buitengewone te beleggen. Bijaldien eene buitengewone Vergadering beschreven wordt, zullen de onderwerpen ter behandeling in den beschrijvingsbrief worden vermeld.

§ 13.

Alle voorstellen, welke niet slechts de orde van behandeling of de huishoudelijke aangelegenheden betreffen, worden schriftelijk aan den Voorzitter ter hand gesteld.

§ 14.

Van de gewone en buitengewone Vergaderingen wordt het Proces-verbaal vóór hare sluiting in kort ontwerp gelezen en goedgekeurd, daarna in zijne uitbreiding vastgesteld in eene volgende Vergadering, en dat van de gewone Vergaderingen zoo spoedig mogelijk in de *Verslagen en Mededeelingen* uitgegeven.

De Processen-verbaal der buitengewone Vergaderingen worden, wanneer tot het drukken daarvan besloten wordt, alleen aan de leden der Akademie, alsook aan de Departementen van algemeen Bestuur, in druk medegedeeld.

§ 15.

In alle gevallen van stemming geschiedt de beslissing bij volstrekte meerderheid.

Bij staking van stemmen beslist de stem van den Voorzitter.

Ter bepaling van de rangorde der stemming wordt tot grondslag genomen de presentie-lijst, op welke iedere naam een nummer heeft. Volgens het lot wordt in elke Vergadering beslist, bij welk nummer de stemming zal aanvangen.

De leden der Afdeeling voor de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen en de Correspondenten der Afdeeling voor de Taal-, Letter-, Geschiedkundige en Wijs-

geerige Wetenschappen, in eene gewone Vergadering tegenwoordig, hebben eene raadgevende stem.

§ 16.

Zoo de stemming de keuze van personen betreft, geschiedt zij met toegevouwen stembriefjes. Indien bij eene eerste stemming geene volstrekte meerderheid verkregen is, heeft er eene tweede vrije stemming plaats. Bij de derde stemming is men gebonden aan de twee personen, die bij de tweede vrije stemming de meeste stemmen op zich vereenigd hebben. De volstrekte meerderheid beslist. Bij gelijkstaande stemmen beslist het lot.

§ 17.

Tot de verkiezing van leden wordt in eene daartoe beschreven buitengewone Vergadering der maand Maart beraadslaagd over de vraag, of eene openstaande plaats zal worden vervuld. Daarna wordt eene lijst opgemaakt van Candidaten, die ten minste een derde der aanwezige stemmen op zich vereenigd hebben, en wier aanspraken op het lidmaatschap door de leden der Afdeeling overwogen worden. Uit deze lijst geschiedt de keuze bij volstrekte meerderheid van stemmen, in eene daartoe beschreven buitengewone Vergadering in de maand April.

§ 18.

Zoo een lid der Afdeeling eenig voorstel, de Akademie betreffende, in de vereenigde Vergadering van April ter beraadslaging wenscht te brengen, is hij gehouden het aan den Voorzitter der Afdeeling tijdig in te zenden, zoodat het in eene daartoe beschreven buitengewone Vergadering op den tweeden Maandag der maand Maart ter beraadslaging zal kunnen worden gebragt. Na goedkeuring der Afdeeling wordt het door den Voorzitter aan het Bestuur der Akademie medegedeeld, en aan zijn oordeel, volgens § 31 onderworpen.

In de buitengewone Vergadering van den tweeden Maandag der maand Maart worden twee leden benoemd, om, vereenigd met twee leden der Natuurkundige Afdeeling, eene Commissie uit te maken, aan welke volgens § 37 de Rekening en Verantwoording van den Algemeenen Secretaris ter beoordeeling wordt gegeven.

VOORZITTER EN ONDER-VOORZITTER.

§ 19.

De Voorzitter leidt de beraadslaging in de Vergaderingen en handhaaft hare orde, volgens hetgeen daaromtrent in § 1, 3, 4, 9, 14, 15 en 16 is vastgesteld. In de orde der stemming brengt hij zijne stem het laatst uit.

§ 20.

De Voorzitter volgt bij de leiding der handelingen van de Vergadering *bij voorkeur* de volgende orde:

1°. lezing van het Proces-verbaal der voorgaande Vergadering, dat, na goedkeuring, door den Voorzitter en den Secretaris geteekend wordt;
2°. kennisgeving van ingekomen stukken en boekwerken;
3°. aanvragen van Regeringswege;
4°. voorstellen van leden;
5°. mededeelingen van Correspondenten, en aanvragen van personen, door geen titel aan de Akademie verbonden;
6°. wetenschappelijke mededeelingen van ter Vergadering aanwezige leden;
7°. laatste omvraag;
8°. lezing en goedkeuring van de korte aanteekeningen van het verhandelde.

§ 21.

Zoo de Voorzitter verhinderd wordt de leiding der Vergadering op zich te nemen, geeft hij daarvan kennis aan den Onder-Voorzitter en aan den Secretaris.

De Onder-Voorzitter vervangt, bij ontstentenis, den Voorzitter, en treedt in al zijne regten en verpligtingen.

SECRETARIS.

§ 22.

De Secretaris zorgt, dat eene aankondiging van elke gewone Vergadering ter plaatsing in de *Nederlandsche Staats-Courant* en in de *Amsterdamsche Courant* tijdig worde opgezonden.

§ 23.

Hij is belast met de uitgave, de verzending en de bewaring van al hetgeen door de Afdeeling in het licht wordt gegeven.

§ 24.

Alle verslagen en brieven der Afdeeling worden door hem geteekend.

§ 25.

De Secretaris brengt al wat hij voor de Afdeeling ontvangt, ter kennisse van den Voorzitter.

§ 26.

De Secretaris geeft nimmer eenig stuk uit het Archief der Afdeeling, zonder behoorlijk bewijs van ontvangst. Dergelijke afgifte kan alleen door leden gevorderd worden.

§ 27.

De Secretaris zorgt, dat zoodra de boekwerken, welke door de Afdeeling uitgegeven worden, zijn afgedrukt, exemplaren daarvan den Algemeenen Secretaris worden ter hand gesteld, ter verzending volgens § 42.

Goedgekeurd,

's Gravenhage den 6den *November* 1855:

De Minister van Binnenlandsche Zaken,

VAN REENEN.

ALGEMEENE BEPALINGEN.

BESTUUR DER AKADEMIE.

§ 28.

De tijdelijke Algemeene Voorzitter en Secretaris maken het bureau van het Bestuur uit.

§ 29.

Het Bestuur beheert de algemeene huishoudelijke belangen der Akademie, en doet, voor zooverre noodig, de gevorderde voorstellen daartoe aan 's lands Regering.

§ 30.

De raming der uitgaven voor het volgend jaar, wordt in de maand Maart door den Algemeenen Secretaris aan het oordeel van het Bestuur onderworpen, en na goedkeuring, gebragt in de vereenigde Vergadering der beide Afdeelingen, volgens Art. 12 van het Organiek Reglement, te houden in de maand April.

§ 31.

Telken jare, in de eerste week der maand April, beraadslaagt het Bestuur over de punten van beschrijving der vereenigde Vergadering van de beide Afdeelingen, te houden in de maand April, en beoordeelt de voorstellen, welke daartoe van de Afdeelingen zijn ingekomen.

§ 32.

Zoo het bijeenroepen eener buitengewone vereenigde Vergadering noodig wordt geacht, bepaalt het Bestuur daartoe de punten van beschrijving.

§ 33.

Zoo een lid der Akademie den aankoop van een of meerdere boekwerken verlangt, zal hij daartoe het voorstel doen in de Afdeeling, waartoe hij behoort. Zoo de afdeeling den aankoop wenschelijk acht, doet zij het voorstel daartoe aan het Bestuur, dat de uitvoerbaarheid van den aankoop, in verband met den staat der kas van de Akademie, beoordeelt, en daarop besluit.

VEREENIGDE VERGADERING DER BEIDE AFDEELINGEN VAN DE AKADEMIE.

§ 34.

De leden der Akademie worden ten minste acht dagen te voren opgeroepen tot de vereenigde Vergadering, volgens Art. 12 van het Organiek Reglement, te houden in de maand April.

De beschrijvingsbrief wordt geteekend door den Algemeenen Secretaris.

De onderwerpen ter behandeling, vastgesteld in de Vergadering van het Bestuur, worden in den beschrijvingsbrief vermeld.

§ 35.

Na de vereenigde Zitting van April, wordt van de afwisseling van den voorrang kennis gegeven aan den Minister van Binnenlandsche Zaken.

§ 36.

In de vereenigde Vergadering voornoemd, wordt het verslag van den staat en de werkzaamheden der Akademie voorgedragen door den Algemeenen Secretaris. Na goedkeuring door haar, wordt het den Koning aangeboden, en een afschrift aan den Minister van Binnenlandsche Zaken medegedeeld.

§ 37.

De Algemeene Secretaris zorgt, dat de Rekening en Verantwoording over het afgeloopen jaar gereed zij in den aanvang der maand Maart. Elke Afdeeling benoemt in de buitengewone Vergaderingen der maand Maart twee leden, welke eene Commissie tot onderzoek van de Rekening en Verantwoording uitmaken. De namen dier leden worden door de Secretarissen der Afdeeling aan den Algemeenen Secretaris bekend gemaakt. De Algemeene Secretaris zorgt, dat aan het oudste lid der Commissie uit de voorzittende Afdeeling, de Rekening en Verantwoording met hare Bescheiden en Memorie van Toelichting tijdig worde ter hand gesteld.

De Commissie brengt haar verslag uit in de vereenigde Vergadering der maand April. Ingeval van goedkeuring wordt de Rekening en Verantwoording door den algemeenen Voorzitter geteekend, en in afschrift medegedeeld aan den Minister van Binnenlandsche Zaken. Zij wordt opgenomen in het Proces-verbaal der vereenigde vergadering.

ALGEMEENE SECRETARIS.

§ 38.

De algemeene Secretaris brengt de besluiten ten uitvoer der vereenigde Vergadering van de Akademie en van haar Bestuur. Hij teekent de van haar uitgaande brieven, en zorgt dat het Proces-verbaal van haar, na goedkeuring door het Bestuur der Akademie, gedrukt, aan hare leden en correspondenten, als ook aan de Hoofden der departementen van algemeen Bestuur verzonden worde.

§ 39.

De algemeene Secretaris is belast met de zorg voor de boekerij der Akademie. Hij doet de aankoopen, waartoe in de Vergaderingen van het Bestuur besloten wordt, draagt zorg voor de completering der in de boekerij voorhanden boekwerken, als ook voor het inbinden daarvan, voor zoo verre zulks gevorderd wordt. Hij zorgt voor de vervaardiging en het in druk uitgeven van eenen Catalogus der boekerij, laat dezen behoorlijk bijschrijven, en geeft elke maand in de *Verslagen en Mededeelingen* der Afdeeling, waarvan hij de Secretaris is, eene volledige lijst uit van de ten geschenke ontvangen en aangekochte boekwerken, met hunne inhoudsopgave. Hij stelt aan het Bestuur de maatregelen voor, gevorderd tot bewaring en uitbreiding der boekerij.

§ 40.

De leden der Akademie hebben het regt, om boeken uit de boekerij der Akademie ten gebruike te ontvangen, onder voorwaarde, dat daarvoor een behoorlijk bewijs van ontvangst worde verleend; dat geen boekwerk langer dan gedurende drie maanden buiten de boekerij blijve, en ingeval van beschadiging, de aangebragte schade door den gebruiker vergoed worde.

Eenige kostbare plaatwerken in groot formaat, waarvan eene lijst, opgemaakt door den algemeenen Secretaris en goedgekeurd door het Bestuur, in de boekerij ter visie behoort te liggen, zullen alleen op magtiging van het Bestuur aan de leden ten gebruike worden gegeven.

De algemeene Secretaris is gemagtigd, om, onder gelijke voorwaarde, boeken ten gebruike te geven aan personen, door geenen titel aan de Akademie verbonden, mits dat hun bewijs van ontvangst ook door een lid der Akademie geteekend worde.

Van de ten gebruike gegeven boekwerken wordt een register door den algemeenen Secretaris gehouden. De bewijzen van ontvangst worden zorgvuldig door hem op het bureau der Akademie bewaard.

§ 41.

In de vereenigde Vergadering van de maand April brengt de algemeene Secretaris een verslag uit over den staat der boekerij, en doet hij de voorstellen, welke tot hare bewaring en uitbreiding aan het Bestuur geschikt zijn voorgekomen.

§ 42.

De algemeene Secretaris zorgt, dat er eene Inventaris zij der bezittingen van de Akademie, en bewaart deze op de wijze, welke aan het Bestuur doeltreffend voorkomt. Hij heeft het archief en het magazijn der Akademie onder zijn beheer, en zorgt voor de verzending van de door de beide Afdeelingen der Akademie uitgegeven werken aan den Koning, de Prinsen van het Vorstelijk Huis, de Hoofden der departementen van algemeen Bestuur, de Leden en Correspondenten der Akademie en de Binnen- en Buitenlandsche Genootschappen, waarmede de Akademie in verbinding is.

Hiervan wordt eene lijst van expeditie door hem bewaard.

Hij zorgt dat de exemplaren, waarover de Akademie de beschikking heeft, behoorlijk bewaard en in een magazijnboek verantwoord worden.

§ 43.

De algemeene Secretaris ontvangt de toelage, welke van 's Rijks wege aan de Akademie wordt verstrekt, als ook de overige baten der Akademie. Hij beheert deze gelden, doet daaruit de noodige betalingen, en verantwoordt ze op de wijze, in § 30 en § 37 omschreven.



MÉMOIRE

SUR

L'ORBITE DE LA COMÈTE PÉRIODIQUE,

DÉCOUVERTE PAR M. D'ARREST LE 27 JUIN 1851,

PAR

J. A. C. OUDEMANS,

Docteur-ès-Sciences, Astronome attaché à l'Observatoire de Leide.

Publié par l'Académie Royale des Sciences à Amsterdam.



AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1854.

MÉMOIRE

SUR

L'ORBITE DE LA COMÈTE PÉRIODIQUE,

DÉCOUVERTE PAR M. D'ARREST LE 27 JUIN 1851,

PAR

M. J. A. C. OUDEMANS.



Au mois de Janvier de l'année passée, en parcourant les *Astronomische Nachrichten,* je fus frappé de ne pas trouver dans ce Journal un orbite de la comète nommée ci-dessus, qui s'accommodât aussi bien que possible à toutes les observations publiées. Je feuilletai aussi *l'Astronomical Journal* et enfin les *Comptes Rendus,* qui ne se trouvaient à la Bibliothèque de l'Université que jusqu'au Numéro du 29 Nov. 1852 inclusivement, mais n'y trouvant que l'orbite publié par M. Yvon Villarceau le 27 Oct. 1851, je recueillis toutes les Observations que je pus trouver, au nombre de 88 et je calculai une éphéméride de deux en deux jours, en partant des éléments publiés par M. d'Arrest au N°. 775 des *Astr. Nachrichten.* L'interpolation donna une éphéméride de 12 heures en 12 heures, à laquelle je comparai toutes les observations.

Une figure me convaincut qu'aucune planète n'avait pu causer une perturbation perceptible pendant les cent jours de visibilité, la comète étant restée toujours à une assez grande distance de chacune d'elles. Néanmoins je réso-

lus de calculer les perturbations causées par Jupiter et Saturne, d'abord pour être plus sûr du fait, et ensuite pour essayer la belle et simple méthode que nous devons à M. M. Bond et Encke, pour calculer les perturbations que subissent les coordonnées rectangulaires d'une planète ou d'une comète. Sa facilité dans la pratique se prouva assez clairement; en effet, pour calculer les perturbations par Saturne pendant 14 périodes de 10 jours, il ne me fallut pas plus de six heures et demie. Un peu plus d'exercice diminuerait encore notablement le temps nécessaire. Le même calcul pour Jupiter a exigé naturellement plus de temps, attendu qu'il fut fait le premier.

Quoique les éléments de M. d'Arrest valussent pour l'équinoxe moyen du 1er Janvier 1851, l'éphéméride fut calculée pour l'équinoxe apparent variable en employant les corrections que les coordonnées rectangulaires de la comète devaient subir par ce changement d'axes. Les formules qui ont servi à cet effet, furent:

$$x - x' = -(y\cos. e + z\sin. e)\,\partial\,.\,\Omega,$$
$$y - y' = +\,x\cos. e\;\partial\,.\,\Omega - z\,\partial. e,$$
$$z - z' = +\,x\sin. e\;\partial\,.\,\Omega + y\,\partial. e,$$

où

$\partial\,.\,e$ = obliquité app. — obliqu. moyenne pour 1851,0

$\partial\,.\,\Omega$ = nutation + précession

$x'\,y'\,z'$ = coordonnées pour l'équinoxe moyen de 1851,0

$x\;y\;z$ = » » » apparent variable.

Maintenant, ayant égard à la parallaxe, l'éphéméride fut comparée aux observations. Outre les 88, mentionnées ci-dessus, M. Secchi avait eu la bonté de m'en communiquer encore une, faite le 30 Août à Rome. Ayant à peine achevé cette comparaison et étant occupé à la formation de huit positions normales, je reçus les numéros suivants des Comptes Rendus, où je vis (au numéro du 6 Déc. 1852) l'extrait d'un Mémoire de M. Yvon Villarceau sur la comète en question, contenant entre autres 6 observations de Paris, dont il n'y avait que deux publiées antérieurement, et deux systèmes d'éléments dont l'un se basait sur 66, l'autre sur 76 observations. Dans le calcul du premier système les dix dernières observations ont été rejetées pour des raisons dont nous parlerons tout à l'heure.

M. Yvon Villarceau avait déterminé, il est vrai, les positions de presque

toutes les étoiles de comparaison à la lunette méridienne et sans doute son travail avait acquis par-là un plus grand mérite que le mien, mais je résolus cependant d'achever aussitôt que posible mon calcul, qui était déjà avancé assez loin. — Je jugeais de moindre intérêt le calcul des perturbations causées par les planètes Mars, la Terre, Vénus et Mercure, en ayant reconnu *à priori* l'inutilité. — Je pris cette résolution d'autant plus que M. Yvon Villarceau n'avait employé que 76 observations, tandis que j'en connaissais 93, abstraction faite de l'observation de Cambridge du 31 Août qui a paru être erronnée, et en comptant celles de Paris et de Rome, qui se sont ajoutées plus tard. En outre les positions des étoiles de comparaison, employées à Bonn, l'observatoire qui avait fourni la plus grande série d'observations, y avaient été déterminées au cercle méridien ou dérivées de bons catalogues d'étoiles.

Je continuais donc mon calcul, mais bientôt je fus forcé de le suspendre, puisque les deux fonctions que j'avais à remplir alors ne me laissaient pas le temps qu'il faut pour un pareil travail.

M. Villarceau remarqua dans les observations faites du 21 jusqu'au 30 Septembre une différence constante d'environ 18″ entre les ascensions droites trouvées à Königsberg par l'Héliomètre et celles trouvées par les procédés ordinaires à Cambridge, (Equatoréal de Northumberland) et à Bonn, (Héliomètre employé comme télescope ordinaire avec un micromètre circulaire,) celles-là étant les plus faibles. En donnant la préférence à la première espèce d'observations à cause de la manière dont elles se font il met à part dans l'un des systèmes, (C), la dernière position normale, et croit que ce système mérite par-là plus de confiance que l'autre, (D). Qu'il me soit permis cependant de faire quelques remarques à cet égard.

1°. Supposons qu'il faut admettre la préférence donnée aux observations à l'héliomètre, alors le rejet de la dernière position normale ne peut pas faire grande chose, vu que toutes les autres sont formées pour la plupart d'observations faites avec d'autres instruments. Même les deux avant-dernières, pour autant qu'on peut conclure de l'extrait du Mémoire, reposent sur des observations obtenues de l'une et de l'autre manière, au moment où la différence constante atteignait 18″. D'ailleurs:

2°. Des différences constantes se présentent souvent, même entre des observations faites avec des instruments semblables par des observateurs différents. Ainsi après avoir comparé toutes les observations à l'éphéméride et

en s'imaginant un observateur, (que nous nommerons un observateur normal,) dont les différences entre les observations et l'éphéméride forment pour chaque période de visibilité * une série changeante proportionnellement au temps, qui s'appuie aussi bien que possible à toutes les différences trouvées, il paraît que M. ARGELANDER a observé les Asc. Droites en général plus faibles que cet observateur normal; du moins de 24 Asc. Droites 17 sont plus faibles et 7 plus fortes, et la moyenne arithmétique donne encore une différence de 4″,5 avec l'erreur probable ± 1″,5. Ensuite de 8 Asc. Droites de M. LUTHER à Berlin, (Micromètre filaire) 7 sont plus fortes que celles de l'observateur normal, et une y est égale; enfin de 10 Asc. Droites de Cambridge 9 sont plus fortes et une est plus faible de manière que la correction spécifique, (voir ci-après) pour ces deux observateurs deviennent respectivement

— 6″,55 avec l'erreur problable ± 1″,8,
— 9″,2 » » » ± 1″,8.

M. VILLARCEAU semble avoir fixé son attention particulièrement sur les différences constantes en Asc. Droite, et, comme on peut voir dans les *Monthly Notices of the R. A. S., Vol.* XIII, N°. 7, en avoir cherché d'expliquer les causes; mais d'après la comparaison des observations entre elles, il paraît que les Déclinations présentent aussi des différences constantes, soit pour toutes les observations d'un même observateur, soit pour celles faites seulement à une certaine époque. Par exemple les Déclinaisons de Cambridge sont généralement plus faibles que celles de l'observateur normal supposé. Celles de Königsberg sont d'abord plus faibles, et à l'époque critique à la fin du mois de Septembre, 4 des 5 sont plus fortes.

Nous ne parlons pas des observations des autres observatoires, qui pour la plupart ne sont pas assez nombreuses, ou pas assez exactes pour y fonder de pareilles spéculations.

Après tout je crois qu'il faut conclure que les différences constantes mentionnées tiennent principalement à ce que les observateurs d'une comète, dépourvue de noyau, prennent chacun un différent point de mire.

3°. En publiant les dernières observations de la comète de D'ARREST, M. WICHMANN dit, (A. N., N°. 778): »*Diese Beobachtungen können wegen der*

* Il y en a eu quatre, voir ci-après.

»geringen Helligkeit der Kometen überhaupt nicht die Genauigkeit besitzen, »welche das Heliometer unter günstigen Umständen gewährt. Ich konnte überall »nur die schwachste (45 fache) Vergrösserung anwenden, und nach Verschie- »bung der Objectivhälften erschien der Komet so schwach, dass er erst nach »längerem Hinsehen mit Mühe wahrnehmbar wurde, und die Einstellung der »obgleich stark abgeblendeten Sterns in die Mitte des Nebels sehr zweifelhaft »blieb. Ich habe es deshalb für besser gehalten, diese Beobachtungen nicht »weiter fortzusetzen, da die Kreismikrometer-beobachtungen unter solchen Um- »ständen wahrscheinlich grössere Sicherheit besitzen würden." Après ce jugement de M. Wichmann je le trouve un peu trop hasardé d'adopter ses observations et de rejeter les autres.

4°. Si l'on regarde (C. R., 6 Déc. 1852) le tableau d'erreurs restantes pour le système (D), alors celle qui appartient à l'Asc. Droite de la dernière position, savoir 8″,3, ne me semble pas du tout inquiétante, attendu qu'on trouve deux autres erreurs restantes qui sont encore plus grandes, savoir celles de la Déclinaison de la première et celle de l'Asc. Droite de la seconde position normale, (9″,6 et 8″,6.)

Donc, tout en admettant la possibilité d'erreurs constantes entre les observations des divers astronomes, je ne crois pourtant pas que pour cette raison, il soit nécessaire ou permis d'en rejeter quelques unes, et c'est pourquoi je n'hésite nullement d'accorder la préférence au système (D).

L'été passé voulant reprendre le calcul de nouveau, je pris la liberté de prier M. Yvon Villarceau de bien vouloir me communiquer les positions des étoiles de comparaison, qu'il avait déterminées presque toutes à la lunette méridienne à Paris. Avec la plus grande complaisance il répondit à cette prière et je voulus alors ne pas épargner la peine de refaire tous les calculs pour arriver aux positions normales. Mais d'abord un petit voyage, et ensuite des occupations plus pressantes ne me permirent de reprendre ce travail qu'après le jour du nouvel an.

Dans ce nouveau calcul j'adoptai les positions des étoiles de comparaison selon M. M. Schmidt, Wichmann, ou Villarceau, si elles étaient déterminées par l'un d'eux seulement. Pour les étoiles déterminées par deux personnes je pris la moyenne arithmétique des différentes déterminations.

La marche que j'ai suivie dans mon calcul a été la marche ordinaire et ce n'est que la méthode d'après laquelle les positions normales ont été formées qu'il faudra expliquer expressément.

S'il s'agit de chercher l'orbite d'une planète, alors leur formation et la détermination de leurs poids respectifs n'offrent généralement pas de difficulté. Les astéroides se présentent aux télescopes comme des étoiles et aussitôt que l'instrument les rend visibles, leur observation n'est pas accompagnée de difficultés extraordinaires, et quoique les instruments qu'on emploie puissent généralement différer en grandeur et en force, néanmoins, si l'observateur prend tous les soins nécessaires, les observations fournies par les micromètres circulaires, les cercles méridiens et l'héliomètre peuvent concourir également au résultat et je ne crois pas qu'un calculateur d'un orbite d'une planète ait jamais senti la nécessité d'accorder aux observations de chaque astronome des poids différents. Les erreurs dont peuvent être affectées les positions des étoiles de comparaison, dans l'Histoire Céleste ou dans les Zones de Bessel, sont ordinairement les causes principales des déviations qui sont trop grandes pour être souffertes.

Chez les comètes au contraire, qui ne présentent pas de noyau, les circonstances sont tout autres. L'astronome qui en veut déterminer une position, doit prendre un point de mire dans une masse nébuleuse souvent de quelques minutes de diamètre. Faute de pouvoir reconnaître son centre de gravité on est obligé de déterminer la position du point le plus lumineux que les lunettes montreront avec d'autant plus de précision, qu'elles sont plus puissantes. Les observations faites par des télescopes plus faibles, doivent donc être moins exactes et en outre se rapporter à des points situés plus près du centre de la masse nébuleuse. Ainsi s'explique en partie la différence constante qui se manifeste quelquefois entre les observations faites à l'aide d'instruments d'inégale grandeur. A l'apparition de 1828 de la comète d'Encke le point le plus lumineux de la masse nébuleuse étant situé au côté où l'Asc. Droite était plus grande, les instruments faibles donnèrent au commencement les Asc. Dr. plus petites et la différence était surtout visible entre les observations de Berlin et de Dorpat où elle attint 40″ à 50″, (*Encke, über den Cometen von Pons,* 2e *Abh. p.* 25.) Outre cette cause, vers la fin de la visibilité, la faiblesse même des comètes fait souvent qu'alors les observations perdent de précision à raison de leur difficulté.

En formant des positions normales, la méthode la plus généralement usitée est d'agir pour les comètes comme pour les planètes, c'est-à-dire d'attribuer à toutes les observations la même valeur, et de prendre tout simplement la moyenne arithmétique de tous les moments d'observation et de toutes les dif-

férences Obs.-Ephém., qui doivent se rapporter à un espace assez court pour qu'on puisse supposer qu'elles changent proportionnellement au temps. Le poids de chaque position normale est égal au nombre des observations dont elle est formée.

Quelquefois cependant on a quitté cette voie dans le but de rendre la solution plus complète en ayant égard aux divers degrés de confiance que méritent les observations des différents astronomes, soit à raison des erreurs constantes, soit des erreurs fortuites.

Ainsi nous rencontrons de temps en temps des cas où le calculateur à jugé devoir se tenir uniquement à une seule série d'observations, obtenue par un instrument puissant.

Par exemple à l'apparition de 1828 de la comète de son nom, M. Encke s'est basé sur les observations de Dorpat seules, dont la supériorité sur toutes les autres, présumable par la puissance de la lunette employée, fut confirmée d'une manière décisive par la régularité avec laquelle leur différence avec l'éphéméride avait changée.

De pareille manière M. M. Hädenkamp et Mayer ont calculé l'orbite de la premiere comète de 1830 sur les observations seules que Bessel avait faites à l'Héliomètre (A. N., N°. 201) Et M. M. Peters et O. Struve, dans le calcul de l'orbite de la comète, découverte par M. Galle, le 2 Déc. 1839, ont cru devoir se borner aux observations de Poulkova et n'ont fait que comparer celles des autres observatoires avec l'éphéméride calculée sur le système d'éléments trouvé. (*Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg.* VIe *Série, Tome* V.)

Rarement cependant il arrivera qu'il faut recourir à cet extrême, maintenant surtout où le nombre des puissantes lunettes n'est plus si limité.

Pour déterminer plus ou moins précisément les erreurs probables des positions normales, on peut agir ainsi: Pour chaque groupe on cherche une série de différences trouvées. Ou bien on embrasse à cet effet deux groupes ou plus, pouvant toujours, s'il est nécessaire, supposer que les différences aient la forme

$$a + bt + ct^2$$

(t étant le nombre de jours écoulés depuis une certaine époque,) et chercher les valeurs les plus probables de a, b et c. On regarde les excès des différences trouvées sur les différences calculées comme provenant des erreurs

des observations et en déduit l'erreur probable des observations de chaque groupe et par-là de chaque position normale.

On voit que l'hypothèse sur laquelle repose ce procédé est celle que les erreurs des observations tiennent principalement à la difficulté pour ainsi dire *objective* d'observer la comète, (difficulté qui change pendant le cours d'une apparition,) ainsi qu'on fait abstraction des divers pouvoirs des instruments. Je l'ai suivi dans un calcul de la 1e comète de 1846. (A. N., N°. 589.) *

Une autre méthode a été mise en pratique par M. Jelinek, dans son calcul de la même comète, (Dr. C. Jelinek *Bahnbestimmung der von de Vico am 24 Jänner 1846 entdeckten Cometen, Prag* 1848.)

Il détermina le poids rélatif des observations de chaque astronome, afin de les employer toutes, mais chacune selon sa propre autorité, à la formation des positions normales. Il considéra les excès des différences calculées au moyen d'une formule parabolique du second degré, comme les erreurs des observations et en déduisit l'erreur moyenne pour chaque observateur. Evidemment cette méthode tient le milieu entre les deux premières déjà citées. M. Jelinek ne voulut pas perdre l'avantage de posséder de bonnes observations en accordant les mêmes poids à toutes. En même temps il jugea qu'il serait décourageant pour ceux qui ne peuvent employer que des instruments d'une qualité médiocre, de voir leurs observations rejetées.

Cette méthode est surtout applicable aux cas, où la différence des télescopes, qui ont fourni les observations, n'est pas si grande qu'on puisse se tenir à une série fournie par un seul instrument.

Je l'ai donc suivie, quoique avec une modification. Les observations de cette comète, provenant de divers observatoires, ayant présenté des différences constantes entre elles, les erreurs moyennes des observations chez lesquelles la différence avec l'observateur normal est la plus considérable, devraient nécessairement être trouvées trop grandes, à moins qu'on eût égard à cette circonstance et qu'on diminuât tous les excès des différences calculées sur les différences trouvées par leur moyenne arithmétique qu'on peut considérer comme la correction spécifique de ces observations.

En même temps cependant, si l'on veut employer les poids ainsi trouvés, il faut corriger préalablement les observations de cette correction spécifique.

* La même méthode a été employée entre autres par M. Encke, dans le calcul de la comète de 1812. (*Zeitschrift für Astronomie*, II, 393). (Note ajoutée plus tard.)

C'est ce que j'ai fait, et la somme des poids des observations qui ont contribué à former une position normale doit être considéré d'en être le poids.

Je ne veux point nier qu'on peut faire des objections contre cette manière d'agir. Surtout le nombre limité des observations de quelques observatoires rend très-incertaine la détermination de leur correction spécifique. De plus celle-ci n'est pas toujours constante. Mais quant à la première remarque, je dois faire observer que dans la formule pour l'erreur moyenne d'une observation corrigée, j'ai tenu compte de l'erreur moyenne de la correction même. D'ailleurs leur influence est très-petite à cause de leur petit nombre. Et pour ce qui concerne l'inconstance de l'erreur spécifique des observations d'un même astronome, le défaut de la méthode est qu'elle ne peut pas en tenir compte, et c'est ce qu'elle a de commun avec toutes les autres. L'effet de l'opération est que là, où les observations d'un seul instrument s'écartent fortement des autres, la déviation existe encore après la correction, seulement un peu diminuée, et en tout cas l'orbite final correspondra mieux aux meilleures observations, que si l'on avait suivi la méthode ordinaire, qui attribue la même valeur à toutes les observations.

Par l'intervention du clair de la Lune, la comète a eu quatre périodes de visibilité, savoir:

du	29 Juin	au	6 Juillet,
»	22 Juillet	»	7 Août,
»	20 Août	»	8 Septembre,
»	21 Sept.	»	6 Octobre,

tandis que l'observation de WASHINGTON du 13 Août tombe entre la seconde et la troisième période de visibilité.

Je commençai donc par comparer toutes les observations à l'éphéméride ayant égard à la parallaxe. Chaque période de visibilité fut divisée en deux moitiés; pour chaque demie période je regardai la moyenne arithmétique de toutes les différences Obs.-Ephém. trouvées comme appartenante à la moyenne arithmétique de tous les temps d'observation. En supposant que la correction de l'éphéméride changeait proportionnellement au temps pendant la durée d'une période de visibilité, je calculai pour chaque jour la valeur de cette correction, qui fut regardée comme la différence Obs.-Ephém. résultant des observations d'un observateur normal.

Pour chaque observateur je cherchai tous les excès des différences norma-

les ainsi calculées sur les différences trouvées et je considérai leur moyenne arithmétique comme la correction spécifique de ses observations. Nommant e_a et e_d ces excès, pour l'Asc. Droite et pour la Déclinaison, s_a et s_d leurs moyennes arithmétiques, n_a et n_d les nombres des observations, alors en ne faisant aucune différence entre les Asc. Droites et les Déclinaisons, l'erreur moyenne de chaque observation de cet astronome sera

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma . (e_a + s_a)^2 \cos.^2 \delta + \Sigma . (e_d + s_d)^2}{n_a + n_d - 2}}.$$

Nommant le poids de chaque observation P, cette quantité sera proportionnelle à $\frac{1}{m^2}$.

Maintenant pour faire coopérer chaque observation, selon le poids qui lui appartient, à la formation des positions normales, elles furent corrigées toutes des corrections spécifiques déjà trouvées s_a et s_d. Chaque observation ainsi corrigée avait une erreur moyenne

$$M = m \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n_a + n_d}\right)}$$

et un poids

$$G = P : \left(1 + \frac{1}{n_a + n_d}\right).$$

Pour plus de facilité, les poids G étant des fractions, j'ai employé à leur place leurs produits par 1000, que j'ai nommé G'. On trouvera ici-bas un tableau, qui contient les résultats de ce calcul. En ayant égard aux poids G' des différences corrigées, les positions normales, leurs poids respectifs et les dates correspondantes furent déterminés ensuite.

L'observation de WASHINGTON du 13 Août fut employée moitié pour la formation pour la deuxième, moitié pour celle de la troisième position normale.

Les huit positions normales donnèrent seize équations pour déterminer les corrections des éléments.

Je donnerai maintenant les différents tableaux requis pour suivre le cours du travail. Ils se rapporteront seulement au deuxième calcul, et je n'aurais pas parlé du tout du premier, si je n'en avais pas emprunté les poids des seize équations, les nouveaux poids en différant trop peu pour refaire le long traitement selon la méthode des moindres carrés.

Les observatoires suivants ont publié leurs observations dans les *Astronomische Nachrichten,* donc je ne les citerai point, puisque ce journal est dans les mains de chacun qui s'occupe de calculs astronomiques.

Leipzig	7 obs.	A. N. N°.	764,765
Bonn	26 »	» » »	795
Berlin	10 »	» » »	768, 771, 788
Cambridge (Angleterre) .	10 »	» » »	779, 788
Königsberg	11 »	» » »	775, 778
Kremsmünster	8 »	» » »	792
Durham	4 »	» » »	784
Rome	1 »	» » »	776
Bilk	3 »	» » »	782
Washington	2 »	» » »	779

Remarque. 1°. D'après une correction au N°. 771 le moment de l'observation du 29 Juin à Leipzig $13^h\ 4^m\ 5^s$ a été augmenté de dix minutes.

2°. En publiant ses observations, M. Argelander y ajoute: »*Die Vergleichung der aus den südlichen und nördlichen Durchgängen folgenden Declinationen des Cometen mit einander hat gezeigt dass alle Chorden desselben zu gross beobachtet sind, und zwar in mit der Schwäche zunehmendem Verhältnisse. Es lässt sich dieses aus eben dieser Lichtschwäche erklären, indem das Glas, welches den Ring hält, bei lichtstärkeren Objecten ohne irgend merklichen Einfluss, bei einem so schwachen Gegenstande einen Unterschied zwischen den äusseren und inneren Appulsen zu Wege bringen musste, und zwar so dass die erstern weiter vom Rande ab beobachtet wurden. Aus diesem Grunde glaube ich wird man gut thun, bei den einseitigen Beobachtungen die Declinationen zu corrigiren um Quantitäten die ich hinter die Buchstaben gesetzt habe, welche die Seite des Feldes anzeigen, in welcher der Comet durchging. Dadurch wird man, glaube ich, sicherere Resultate erlangen.* — — —

»Sept. 7. 8. *Diese beide Beobachtungen sind von* Schmidt, *ob sie dieselbe Correction wie die meinigen erfordern wage ich nicht zu entscheiden.*"

En appliquant ces corrections aux observations de M. Argelander, l'harmonie avec les autres observations y gagna réellement. Mais ces corrections

ne paraissant pas nécessaires pour les observations de M. Schmidt, j'ai employées celles-ci sans altération.

3°. A.N. N°. 788. Observations de Berlin. Au lieu de Sept. 6 lisez Oct. 6.

4°. A.N. N°. 775. La remarque de M. Wichmann sur la position de l'étoile *c* n'est pas fondée. La position selon Bessel, (Weisse, III, 911) s'accorde avec la détermination de M. Yvon Villarceau, c'est donc Lalande qui donne la déclinaison trop forte d'environ 34″.

Dans la réduction de l'étoile *d* a été commise une faute d'une seconde en temps: l'asc. droite donnée est trop forte de 15″.

Outre les observations citées ci-dessus, je trouvai encore celles qui suivent:

Harvard Observatory, Cambridge, (Mass.) . (A. J. N°. 30)

1851.	T. M. de Cambr.	AR ☄	Décl. ☄	
Août 31	16h 14m 13s,60	4h 1m 52s,29	+ 3° 21′ 8″,08	Eq. moy. 1 Janv. 1851.
Sept. 3	15 42 39 ,99	4 6 8 ,77	2 37 42 ,57	
5	15 54 1 ,05	4 8 50 ,77	2 10 41 ,10	

Regent's Park, London, (*Monthy Notices*, Vol. XI, N°. 8).

1851.	T. M. de Greenwich.	AR. ☄	Décl. ☄
Juillet 4	13h 4m 59s	15° 37′ 32″,0	+ 10° 48′ 20″,0

Paris, (C. R. 6 Déc. 1852.)

1851.	T. M. de Paris.	Positions de la Comète corrigées de la Parallaxe. AR. app.	Décl. app.	Nombre des Comp.
Juillet	5,57954	16° 44′ 6″,0	+ 10° 49′ 34″,4	2
	6,56155	17 47 54 ,7	10 49 56 ,8	3
	27,56573	38 12 41 ,7	9 33 19 ,2	3
Août	3,54972	43 53 33 ,0	8 38 5 ,5	3 et 2
	21,53104	55 38 45 ,4	5 28 55 ,7	4
	22,55249	56 10 41 ,7	5 16 53 ,1	3
		56 10 47 ,1	»	

J'ajoute en même temps le Tableau des positions moyennes des étoiles de

comparaison, que M. Villarceau a déduites de ses observations, et qu'il a eu la bonté de me communiquer.

LIEU DE L'OBSERVATION DE LA COMÈTE.	DATE 1851.	POSITION MOYENNE DE L'ÉTOILE, LE 1er JANVIER 1851.		NOMBRE DES OBSERVATIONS.		
		ASC. DROITE.	DÉCLINAISON.	AR.	D.	
Berlin	Juillet 1	12° 21′ 11″,7	+10° 38′ 57″,7	5	1	
Berlin	2	13 37 35 ,5	10 43 22 ,6	2	1	
Bonn	3	14 21 9 ,0	10 46 18 ,8	6	3	
Bonn, Berlin	5	16 35 27 ,7	10 44 23 ,5	2	3	
Paris	5	$1^h 13^m 27^s$,69	10 45 14 ,3	5	3	même ét.
Bonn, Paris	6	18° 21′ 55″,3	10 45 14 ,3	5	3	
Bonn	22	33 48 48 ,1	10 9 18 ,1	3	2	
Königsberg	23	34 25 42 ,45	—	2	.	
Bonn	24	34 41 38 ,2	9 53 30 ,6	2	2	
Bonn	25	38 11 49 ,0	9 42 26 ,9	2	1	
Bonn	27	37 45 35 ,8	9 56 34 ,2	2	2	
Paris	27	39 13 23 ,4	9 28 55 ,5	2	1	
Bonn, Berlin	28					
Königsberg	31	41 26 37 ,6	8 43 28 ,0	4	3	
Berlin	Août 2					
Bonn	2	42 56 0 ,9	8 18 37 ,1	3	2	
Paris	3	$2^h 56^m 43^s$,08	8 30 22 ,0	2	3	
Berlin	4	44° 10′ 18″,6	—	1	.	
Bonn	5	45 10 6 ,7 :	7 53 36 ,5	1	1	
Bonn	5	45 4 28 ,6	8 44 26 ,0	2	1	
Washington	6	$3^h 4^m 36^s$,23	8 1 47 ,4	3	4	même ét.
Bonn, Cambridge . .	7	46° 9′ 3″,4	8 1 47 ,4	3	4	
Washington	13	$3^h 24^m 6^s$,23	7 3 21 ,5	3	2	
Paris, Cambridge, Bonn.	21	—	5 34 46 ,4	.	3	
Königsberg, Paris . .	22	56° 44′ 2″,2	5 8 27 ,7	2	3	
Paris	22	$3^h 48^m 33^s$,32	—	1	.	
Königsberg	26	57° 55′ 33″,3	—	2	.	
Königsberg	30	60 0 50 ,5	3 53 45 ,8 :	2	2	
Königsberg	Sept. 3	61 24 18 ,0	+ 2 29 7 ,7	1	2	
Cambridge.	22	$4^h 18^m 6^s$,86	— 1 45 17 ,1	2	2	
Bonn, Königsberg . .	24	65° 45′ 58″,5 :	— 2 33 31 ,6	1	2	
Bonn	24	66 2 52 ,2	—	1	.	
Bonn, Königsberg . .	27	65 45 58 ,5 :	— 2 33 31 ,6	1	2	

Enfin M. Secchi me communiqua encore l'observation suivante faite à Rome :

	AR. ⚹	Décl. ⚹
1851, Août 30.	59° 53′ 21″,45	+ 3° 35′ 29″,3.

Position de l'étoile de comparaison, 1851,0

	60° 0′ 53″,7	+ 3° 53′ 43″,4.

Les éléments, dont je partis, furent ceux, que M. D'ARREST a publiés au N°. 775 des *Astr. Nachr.*, savoir:

T = Passage au Périh.	1851. Juill. 8,737236 T. M. de Berlin.	
π = Longit. du Périh.	322° 59′ 45″,94	Equin. moy. 1851,0
☊ = Longit. du ☊	148 27 19 ,99	
i = Inclinaison	13 56 11 ,51	
e = Exentricité	0,6608815	
a = Demie grande axe	3,4618464	
μ = Mouvem. moy. diurne	550,86468	
Période de révolution	2353 jours	
φ = Angle de l'Exc.	41° 22′ 1″,67	
log. a	0,5393078.	

Ayant adopté pour les masses des deux planètes Jupiter et Saturne les valeurs $\frac{1}{1047,9}$ et $\frac{1}{3501,6}$, j'ai trouvé les perturbatons suivantes, exprimées en unités de la septième décimale des coordonnées x y z.

0^h T. M. DE BERLIN.	$\Delta . x$			$\Delta . y$			$\Delta . z$		
	♃	♄	TOTAL.	♃	♄	TOTAL.	♃	♄	TOTAL.
1851 Juin 29	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Juillet 9	+ 0,9	— 0,0	+ 0,9	+ 1,9	+ 0,1	+ 2,0	+ 0,7	+ 0,0	+ 0,7
" 19	3,0	— 0,0	3,0	5,7	0,4	6,1	2,1	0,1	2,2
" 29	6,7	+ 0,1	6,8	11,3	0,9	12,2	4,2	0,3	4,5
Août 8	12,4	0,2	12,6	18,5	1,5	20,0	7,0	0,5	7,5
" 18	20,4	0,6	21,0	27,1	2,3	29,4	10,5	0,8	11,3
" 28	31,6	1,1	32,7	37,2	3,2	40,4	14,5	1,2	15,7
Sept. 7	46,2	2,0	48,2	48,8	4,3	53,1	19,2	1,7	20,9
" 17	65,0	3,2	68,2	62,3	5,6	67,9	24,4	2,2	26,6
" 27	88,4	4,8	93,2	77,9	7,1	85,0	30,2	2,9	33,1
Oct. 7	+116,6	+ 6,9	+123,5	+ 96,1	+ 8,8	+104,9	+ 36,7	+ 3,6	+ 40,3

L'axe de z fut pris pependiculaire au plan de l'équateur, l'axe de x dans ce plan vers l'équinoxe du printemps et l'axe de y vers l'intersection de l'équateur et de la colure du solstice d'été.

L'éphéméride suivante calculée pour l'équinoxe apparent variable donne la position de la comète pour le temps T + t, par les formules:

$$\text{AR} ☄ (T + t) = \text{AR} ☄ (T) + a\,t + b\,t^2,$$
$$\text{Décl.} ☄ (T + t) = \text{Décl.} ☄ (T) + c\,t + d\,t^2,$$

t étant exprimé en parties décimales du jour. Quoique l'éphéméride fût interpolée de 12^h à 12^h, les positions pour Minuit Moyen de Berlin suffiront.

1851.		AR ☄	*Log. a*	*Log. b*	*Décl.* ☄	*Log. c*	*Log. d*
Juin	29,5	10° 1′ 56″,3	3,60347	$0,949_n$	+ 10° 37′ 55″,9	2,2740	$1,097_n$
	30,5	11 8 40 ,1	3,60154	$0,991_n$	10 40 51 ,2	2,2108	$1,104_n$
Juillet	1,5	12 15 5 ,2	3,59937	$1,017_n$	10 43 21 ,1	2,1377	$1,100_n$
	2,5	13 21 9 ,9	3,59704	$1,045_n$	10 45 25 ,8	2,0504	$1,097_n$
	3,5	14 26 52 ,7	3,59459	$1,068_n$	10 47 5 ,5	1,9395	$1,097_n$
	4,5	15 32 12 ,5	3,59197	$1,090_n$	10 48 20 ,1	1,7931	$1,093_n$
	5,5	16 37 8 ,0	3,58917	$1,117_n$	10 49 9 ,9	1,5740	$1,086_n$
	6,5	17 41 37 ,8	3,58623	$1,127_n$	10 49 35 ,2	1,1206	$1,079_n$
	7,5	18 45 41 ,0	3,58318	$1,149_n$	10 49 36 ,4	$1,0334_n$	$1,079_n$
	8,5	19 49 16 ,4	3,57991	$1,164_n$	10 49 13 ,6	$1,5391_n$	$1,068_n$
Juillet	21,5	32 46 0 ,2	3,52421	$1,310_n$	10 10 35 ,4	$2,4951_n$	$0,954_n$
	22,5	33 41 23 ,4	3,51887	$1,314_n$	10 5 13 ,7	$2,5194_n$	$0,954_n$
	23,5	34 36 5 ,5	3,51340	$1,324_n$	9 59 34 ,0	$2,5426_n$	$0,949_n$
	24,5	35 30 5 ,7	3,50769	$1,328_n$	9 53 36 ,4	$2,5639_n$	$0,949_n$
	25,5	36 23 23 ,3	3,50195	$1,335_n$	9 47 21 ,1	$2,5848_n$	$0,935_n$
	26,5	37 15 58 ,0	3,49602	$1,337_n$	9 40 48 ,3	$2,6033_n$	$0,924_n$
	27,5	38 7 49 ,4	3,48990	$1,340_n$	9 33 58 ,7	$2,6214_n$	$0,914_n$
	28,5	38 58 57 ,0	3,48370	$1,346_n$	9 26 52 ,5	$2,6379_n$	$0,909_n$
	29,5	39 49 20 ,4	3,47725	$1,348_n$	9 19 30 ,1	$2,6537_n$	$0,898_n$
	30,5	40 38 59 ,1	3,47073	$1,352_n$	9 11 51 ,8	$2,6684_n$	$0,881_n$
	31,5	41 27 52 ,9	3,46406	$1,356_n$	9 3 58 ,2	$2,6827_n$	$0,869_n$
Août	1,5	42 16 1 ,4	3,45729	$1,358_n$	8 55 49 ,7	$2,6955_n$	$0,863_n$
	2,5	43 3 24 ,5	3,45031	$1,356_n$	8 47 26 ,5	$2,7078_n$	$0,851_n$
	3,5	43 50 2 ,1	3,44317	$1,362_n$	8 38 49 ,1	$2,7194_n$	$0,833_n$
	4,5	44 35 53 ,7	3,43597	$1,364_n$	8 29 58 ,0	$2,7305_n$	$0,820_n$
	5,5	45 20 59 ,3	3,42859	$1,362_n$	8 20 53 ,6	$2,7413_n$	$0,813_n$
	6,5	46 5 18 ,9	3,42106	$1,366_n$	8 11 36 ,0	$2,7512_n$	$0,799_n$
	7,5	46 48 52 ,2	3,41333	$1,366_n$	8 2 5 ,8	$2,7606_n$	$0,785_n$
	20,5	55 3 56 ,8	3,29563	$1,387_n$	5 41 43 ,7	$2,8524_n$	$0,643_n$
	21,5	55 36 27 ,9	3,28477	$1,387_n$	5 29 47 ,6	$2,8576_n$	$0,633_n$
	22,5	56 8 10 ,2	3,27365	$1,389_n$	5 17 42 ,9	$2,8625_n$	$0,613_n$
	23,5	56 39 3 ,6	3,26226	$1,387_n$	5 5 30 ,0	$2,8676_n$	$0,602_n$
	24,5	57 9 8 ,4	3,25049	$1,391_n$	4 53 9 ,1	$2,8722_n$	$0,591_n$
	25,5	57 38 24 ,1	3,23835	$1,393_n$	4 40 40 ,5	$2,8766_n$	$0,580_n$
	26,5	58 6 50 ,5	3,22570	$1,393_n$	4 28 4 ,3	$2,8807_n$	$0,556_n$
	27,5	58 34 27 ,4	3,21277	$1,395_n$	4 15 20 ,9	$2,8846_n$	$0,532_n$
	28,5	59 1 14 ,8	3,19943	$1,393_n$	4 2 30 ,7	$2,8886_n$	$0,505_n$
	29,5	59 27 12 ,8	3,18560	$1,395_n$	3 49 33 ,8	$2,8923_n$	$0,477_n$
	30,5	59 52 21 ,2	3,17132	$1,395_n$	3 36 30 ,6	$2,8956_n$	$0,462_n$
	31,5	60 16 40 ,0	3,15664	$1,395_n$	3 23 21 ,3	$2,8986_n$	$0,447_n$
Septembre	1,5	60 40 9 ,3	3,14136	$1,395_n$	3 10 6 ,4	$2,9017_n$	$0,42_n$
	2,5	61 2 49 ,0	3,12551	$1,400_n$	2 56 46 ,2	$2,9047_n$	$0,40_n$
	3,5	61 24 38 ,7	3,10857	$1,395_n$	2 43 20 ,8	$2,9072_n$	$0,36_n$
	4,5	61 45 38 ,3	3,09160	$1,396_n$	2 29 50 ,8	$2,9098_n$	$0,34_n$
	5,5	62 5 48 ,3	3,07383	$1,395_n$	2 16 16 ,3	$2,9130_n$	$0,32_n$
	6,5	62 25 8 ,6	3,05515	$1,395_n$	2 2 37 ,6	$2,9140_n$	$0,26_n$
	7,5	62 43 39 ,2	3,03579	$1,395_n$	1 48 55 ,2	$2,9159_n$	$0,23_n$
	8,5	63 1 20 ,1	3,01532	$1,395_n$	+ 1 35 9 ,3	$2,9177_n$	$0,18_n$

1851.	AR ☄	*Log. a*	*Log. b*	*Décl.* ☄	*Log. c*	*Log. d*
Septembre 21,5	65°34′45″,6	2,5782	1,406$_n$	— 1°26′30″,0	2,9232$_n$	0,04
22,5	65 40 38 ,6	2,5149	1,405$_n$	1 40 27 ,1	2,9222$_n$	0,15
23,5	65 45 40 ,5	2,4423	1,403$_n$	1 54 21 ,6	2,9207$_n$	0,26
24,5	65 49 51 ,9	2,3541	1,403$_n$	2 8 12 ,8	2,9192$_n$	0,26
25,5	65 53 12 ,7	2,2455	1,398$_n$	2 22 0 ,6	2,9169$_n$	0,32
26,5	65 55 43 ,5	2,0990	1,396$_n$	2 35 44 ,0	2,9144$_n$	0,40
27,5	65 57 24 ,3	1,8797	1,391$_n$	2 49 22 ,5	2,9116$_n$	0,48
28,5	65 58 15 ,7	1,4265	1,393$_n$	3 2 55 ,2	2,9084$_n$	0,49
29,5	65 58 17 ,8	1,3502$_n$	1,382$_n$	3 16 21 ,8	2,9048$_n$	0,54
30,5	65 57 31 ,4	1,8494$_n$	1,380$_n$	3 29 41 ,5	2,9009$_n$	0,60
Octobre 1,5	65 55 56 ,9	2,0737$_n$	1,378$_n$	3 42 53 ,5	2,8966$_n$	0,61
2,5	65 53 34 ,5	2,2196$_n$	1,371$_n$	3 55 57 ,4	2,8918$_n$	0,66
3,5	65 50 25 ,1	2,3280$_n$	1,366$_n$	4 8 52 ,3	2,8866$_n$	0,68
4,5	65 46 29 ,1	2,4131$_n$	1,360$_n$	4 21 37 ,7	2,8810$_n$	0,71
5,5	65 41 47 ,2	2,4837$_n$	1,352$_n$	4 34 12 ,9	2,8750$_n$	0,74
6,5	65 36 20 ,2	2,5431$_n$	1,344$_n$	— 4 46 37 ,1	2,8684$_n$	0,76

1851.	*Log. r*	*Log.* Δ
Juin 29,0	0,072 1301	9,852 1589
Juillet 1,0	0,071 2235	9,851 2095
3,0	0,070 5210	9,850 5460
5,0	0,070 0253	9,850 1563
7,0	0,069 7386	9,850 0246
9,0	0,069 6609	9,850 1327
21,0	0,073 5618	9,854 8055
23,0	0,074 9178	9,856 0757
25,0	0,076 4653	9,857 4403
27,0	0,078 1991	9,858 8826
29,0	0,080 1133	9,860 3884
31,0	0,082 2020	9,861 9442
Août 2,0	0,084 4586	9,863 5379
4,0	0,086 8761	9,865 1581
6,0	0,089 4475	9,866 7927
8,0	0,092 1654	9,868 4319
13,82968	0,100 8526	9,873 1343

1851.	*Log. r*	*Log.* Δ
Août 20,0	0,111 1254	9,877 8150
22,0	0,114 6568	9,879 2397
24,0	0,118 2745	9,880 6162
26,0	0,121 9716	9,881 9429
28,0	0,125 7413	9,883 2231
30,0	0,129 5766	9,884 4585
Sept. 1,0	0,133 4715	9,885 6525
3,0	0,137 4196	9,886 8091
5,0	0,141 4153	9,887 9340
7,0	0,145 4526	9,889 0300
9,0	0,149 5265	9,890 1035
21,0	0,174 4694	9,896 5194
23,0	0,178 6710	9,897 6868
25,0	0,182 8756	9,898 9205
27,0	0,187 0800	9,900 2360
29,0	0,191 2817	9,901 6516
Oct. 1,0	0,195 4778	9,903 1835
3,0	0,199 6657	9,904 8482
5,0	0,203 8433	9,906 6616
7,0	0,208 0084	9,908 6397

Dans ce tableau *log. r* appartient à l'orbite elliptique pur, tandisque Δ appartient à l'éphéméride donnée ci-dessus et se rapporte à la position de la comète perturbée.

Le tableau suivant indique les corrections appliquées aux observations pour les positions corrigées de l'étoile de comparaison; les différences des observations avec l'éphéméride donnée ci-dessus, enfin ces mêmes différences, calculées des précédentes en adoptant, qu'elles changent proportionnellement au temps pendant la durée d'une période de visibilité.

DATE.	LIEU DE L'OBSERVATION.	CORRECTION POUR LA POSITION DE L'ÉT. DE COMPARAISON.		DIFFÉRENCE OBS. — ÉPHÉM. TROUVÉE.		DIFFÉRENCE OBS. — ÉPHÉM. CALCULÉE.	
		A. DR.	DÉCL.	A. DR.	DÉCL.	A. DR.	DÉCL.
Juin 29	Leipzig. . . .	. . .	. . .	—38″,1	—21″,5	—11″,2	— 6″,2
30	〃	. . .	. . .	+ 2 ,1	— 4 ,5	— 8 ,6	— 4 ,1
Juillet 1	〃	— 7″,0	— 0″,5	—18 ,2	+20 ,0	— 6 ,0	— 2 ,0
〃	〃	. . .	. . .	— 7 ,3	—	— 6 ,0	— 2 ,0
〃	Berlin	— 8 ,1	— 0 ,5	— 8 ,8	+ 8 ,7	— 6 ,0	— 2 ,0
2	Leipzig	. . .	. . .	+ 2 ,9	—14 ,8	— 3 ,4	+ 0 ,1
〃	Berlin	— 8 ,0	— 2 ,0	— 1 ,3	+ 0 ,8	— 3 ,4	+ 0 ,1
3	Bonn	— 1 ,4	+ 1 ,4	+20 ,8	— 3 ,0	— 0 ,8	+ 2 ,1
4	Leipzig	. . .	. . .	—34 ,2	+ 1 ,7	+ 1 ,9	+ 4 ,2
〃	Londres. . . .	. . .	. . .	+ 6 ,2	+ 4 ,1	+ 1 ,9	+ 4 ,2
5	Berlin	+ 3 ,5	— 1 ,1	— 0 ,3	+ 5 ,4	+ 4 ,5	+ 6 ,3
〃	Bonn	— 0 ,3	+ 0 ,8	+12 ,8	— 3 ,5	+ 4 ,5	+ 6 ,3
〃	Paris	+ 1 ,7	+ 2 ,0	+ 7 ,6	+22 ,7	+ 4 ,5	+ 6 ,3
6	Leipzig	. . .	. . .	+ 7 ,8	— 0 ,9	+ 7 ,1	+ 8 ,4
〃	Bonn	— 1 ,8	+ 2 ,0	— 2 ,1	— 1 ,4	+ 7 ,1	+ 8 ,4
〃	Paris	+ 1 ,8	— 2 ,0	+38 ,7	+18 ,5	+ 7 ,1	+ 8 ,4
22	Bonn	— 0 ,5	+ 0 ,2	+19 ,5	—12 ,9	+ 5 ,3	+ 2 ,9
23	Königsberg. .	+ 2 ,0	. . .	+ 3 ,2	+12 ,8	+ 5 ,0	+ 2 ,8
〃	Berlin	. . .	. . .	—15 ,5	+21 ,4	+ 5 ,0	+ 2 ,8
24	Bonn	+ 0 ,4	+ 2 ,0	+17 ,3	— 1 ,4	+ 4 ,7	+ 2 ,6
25	〃	+ 0 ,2	— 0 ,4	+11 ,1	+ 4 ,6	+ 4 ,4	+ 2 ,4
27	〃	— 0 ,7	+ 0 ,3	+ 6 ,1	+ 2 ,8	+ 3 ,8	+ 2 ,0
〃	Paris	+ 0 ,4	— 1 ,8	+ 7 ,6	+ 0 ,4	+ 3 ,8	+ 2 ,0
28	Bonn	— 0 ,3	+ 0 ,9	+ 3 ,0	+ 1 ,6	+ 3 ,5	+ 1 ,8
〃	Kremsmünster	. . .	. . .	— 0 ,15	—12 ,9	+ 3 ,5	+ 1 ,8
〃	Berlin.	+ 9 ,8	— 6 ,9	— 3 ,85	+ 1 ,1	+ 3 ,5	+ 1 ,8
29	Kremsm. . . .	. . .	. . .	— 3 ,4	+ 7 ,3	+ 3 ,2	+ 1 ,7
31	Königsberg. .	+ 0 ,7	+ 0 ,4	+10 ,2	+ 5 ,3	+ 2 ,6	+ 1 ,3
Août 2	Bonn	— 1 ,9	+ 0 ,2	+11 ,9	— 2 ,0	+ 2 ,0	+ 0 ,9
〃	Berlin	— 2 ,2	— 0 ,4	+ 2 ,0	+ 2 ,2	+ 2 ,0	+ 0 ,9
3	Paris	. . .	. . .	— 0 ,4	— 3 ,6	+ 1 ,7	+ 0 ,7
4	Berlin.	+ 1 ,0	. . .	— 5 ,4	— 4 ,2	+ 1 ,4	+ 0 ,6
5	Bonn	. . .	+ 0 ,6	+12 ,9	— 4 ,5	+ 1 ,1	+ 0 ,4
〃	〃	— 0 ,3	+ 0 ,0	+ 6 ,9	+ 1 ,7	+ 1 ,1	+ 0 ,4
6	Kremsmünster	+ 0 ,5	+ 1 ,1	—12 ,0	+ 7 ,6	+ 0 ,8	+ 0 ,2
〃	Washington. .	+ 5 ,0	+ 1 ,9	—10 ,3	— 1 ,6	+ 0 ,8	+ 0 ,2

DATE.	LIEU DE L'OBSERVATION.	CORRECTION POUR LA POSITION DE L'ÉT. DE COMPARAISON.		DIFFÉRENCE OBS. — ÉPHÉM. TROUVÉE.		DIFFÉRENCE OBS. — ÉPHÉM. CALCULÉE.	
		A. DR.	DÉCL.	A. DR.	DÉCL.	A. DR.	DÉCL.
Août 7	Bonn	— 0″,2	— 1″,1	+ 3″,3	+ 0″,5	+ 0″,5	+ 0″,0
〃	Cambr. (Ang.)	+ 1 ,0	+ 2 ,0	— 9 ,55	+ 4 ,6	+ 0 ,5	+ 0 ,0
13	Washington .	+ 0 ,3	+ 7 ,3	+ 6 ,25	—20 ,8	+ 1 ,6	+ 0 ,5
20	Kremsmünster	. . .	. . .	—25 ,45	— 8 ,9	+ 6 ,1	+ 2 ,5
21	Paris	. . .	— 0 ,4	+27 ,0	—10 ,9	+ 5 ,6	+ 2 ,4
〃	Kremsmünster	. . .	. . .	+13 ,45	—12 ,3	+ 5 ,6	+ 2 ,4
〃	Cambr. (Ang.)	. . .	+ 0 ,7	— 7 ,4	+ 1 ,5	+ 5 ,6	+ 2 ,4
〃	Bonn	+ 0 ,3	— 0 ,8	+28 ,0	+25 ,2	+ 5 ,6	+ 2 ,4
22	Königsberg . .	— 2 ,3	— 1 ,6	+ 9 ,1	+13 ,4	+ 5 ,2	+ 2 ,3
〃	Kremsmünster	. . .	. . .	— 8 ,75	(+34 ,6:)	+ 5 ,2	+ 2 ,3
〃	Bonn	. . .	. . .	+ 8 ,0	+ 4 ,6	+ 5 ,2	+ 2 ,3
〃	Paris	. . .	. . .	+ 3 ,6	+ 7 ,7	+ 5 ,2	+ 2 ,3
〃	〃	. . .	. . .	+ 9 ,0	. . .	+ 5 ,2	+ 2 ,3
24	Durham . . .	. . .	. . .	+ 2 ,2	— 2 ,7	+ 4 ,3	+ 2 ,1
25	Bonn	. . .	. . .	+ 7 ,3	— 1 ,3	+ 3 ,8	+ 2 ,0
26	Königsberg . .	—20 ,7	. . .	+ 5 ,2	+11 ,2	+ 3 ,4	+ 1 ,9
〃	Kremsmünster	— 5 ,8	. . .	+ 0 ,75	+11 ,1	+ 3 ,4	+ 1 ,9
29	Berlin	. . .	. . .	+ 0 ,9	— 5 ,2	+ 2 ,1	+ 1 ,5
30	Königsberg . .	+ 4 ,7	— 2 ,0	+ 0 ,1	+13 ,5	+ 1 ,6	+ 1 ,4
〃	Rome	— 1 ,6	. . .	— 2 ,25	—25 ,9	+ 1 ,6	+ 1 ,4
〃	Durham. . . .	. . .	. . .	+ 8 ,5	+20 ,7	+ 1 ,6	+ 1 ,4
31	Cambr.(Mass.)	erronnée.					
Sept. 1	Rome	+ 5 ,3	—11 ,2	+ 7 ,6	+19 ,4	+ 0 ,7	+ 1 ,2
〃	Durham. . . .	. . .	. . .	+ 4 ,2	+40 ,1	+ 0 ,7	+ 1 ,2
2	Bonn	. . .	. . .	+ 1 ,45	+ 4 ,2	+ 0 ,3	+ 1 ,1
3	Königsberg . .	. . .	. . .	— 1 ,85	+ 3 ,7	— 0 ,2	+ 1 ,0
〃	Cambr.(Mass.)	. . .	. . .	—26 ,0	—10 ,8	— 0 ,2	+ 1 ,0
5	Berlin	+ 2 ,6	+ 2 ,7	—10 ,6	— 2 ,7	— 1 ,1	+ 0 ,8
〃	Cambr.(Mass.)	. . .	. . .	—32 ,65	+ 3 ,0	— 1 ,1	+ 0 ,8
6	Durham. . . .	+ 5 ,0	+ 2 ,5	+14 ,05	—26 ,9	— 1 ,5	+ 0 ,7
7	Bonn (S.) . .	. . .	. . .	+21 ,8	—19 ,0	— 2 ,0	+ 0 ,6
8	〃 (S.) . .	. . .	. . .	+15 ,4	+ 1 ,0	— 2 ,4	+ 0 ,5
21	Königsberg . .	— 1 ,5	+ 0 ,1	— 4 ,25	+ 6 ,95	— 0 ,3	— 4 ,7
22	Cambr. (Ang.)	+ 4 ,6	— 0 ,9	—26 ,4	+ 9 ,15	— 2 ,3	— 3 ,9
〃	Königsberg . .	— 1 ,5	+ 0 ,2	— 0 ,3	— 9 ,05	— 2 ,3	— 3 ,9

DATE.	LIEU DE L'OBSERVATION.	CORRECTION POUR LA POSITION DE L'ÉT. DE COMPARAISON.		DIFFÉRENCE OBS. — ÉPHÉM. TROUVÉE.		DIFFÉRENCE OBS. — ÉPHÉM. CALCULÉE.	
		A. DR.	DÉCL.	A. DR.	DÉCL.	A. DR.	DÉCL.
Sept. 23	Bilk	. . .	. . .	—16″,1	+14″,0	— 4″,3	— 3″,1
24	Bonn	+ 0″,0	— 2″,7	— 3 ,7	+16 ,6	— 6 ,3	— 2 ,3
〃	〃	+ 2 ,2	— 0 ,1	—32 ,1	+ 7 ,2	— 6 ,3	— 2 ,3
〃	Bilk	. . .	. . .	— 9 ,7	+ 3 ,1	— 6 ,3	— 2 ,3
〃	Königsberg. .	— 0 ,0	+ 0 ,4	+ 0, 5	—13 ,9	— 6 ,3	— 2 ,3
27	Bonn	+ 0 ,0	— 2 ,7	—12 ,5	+ 7 ,3	—12 ,2	+ 0 ,0
〃	〃	. . .	. . .	—29 ,25	— 5 ,2	—12 ,2	+ 0 ,0
〃	Bilk	. . .	. . .	—13 ,8	— 6 ,05	—12 ,2	+ 0 ,0
〃	Königsberg. .	— 0 ,0	+ 0 ,4	+ 9 ,95	—11 ,2	—12 ,2	+ 0 ,0
29	Cambr. (Ang.)	. . .	. . .	—20 ,15	+ 4 ,4	—16 ,2	+ 1 ,6
30	Königsberg. .	+ 1 ,0	— 1 ,5	+ 1 ,0	—15 ,85	—18 ,2	+ 2 ,4
Oct. 1	Kremsm. . . .	. . .	. . .	+33 ,0	—18 ,0	—20 ,2	+ 3 ,1
2	Bonn	. . .	. . .	—26 ,4	— 3 ,6	—22 ,2	+ 3 ,9
〃	Cambr. (Ang.)	. . .	. . .	—36 ,4	— 3 ,8	—22 ,2	+ 3 ,9
〃	〃	. . .	. . .	—30 ,4	+ 3 ,3	—22 ,2	+ 3 ,9
3	Bonn	. . .	. . .	—12 ,4	— 3 ,1	—24 ,2	+ 4 ,7
〃	〃	. . .	. . .	+ 2 ,6	+12 ,2	—24 ,2	+ 4 ,7
4	Cambr. (Ang.)	. . .	. . .	—28 ,2	+ 9 ,1	—26 ,2	+ 5 ,5
〃	Bonn	. . .	. . .	—27 ,7	— 8 ,8	—26 ,2	+ 5 ,5
〃	Cambr. (Ang.)	. . .	. . .	—21 ,1	+ 5 ,5	—26 ,2	+ 5 ,5
〃	〃	. . .	. . .	—26 ,95	+23 ,7	—26 ,2	+ 5 ,5
〃	〃	. . .	. . .	—37 ,45	+24 ,6	—26 ,2	+ 5 ,5
6	Berlin	. . .	. . .	—32 ,4	— 3 ,0	—30 ,1	+ 7 ,0

D'après la méthode expliquée ci-dessus le tableau suivant fut calculé, qui contient les corrections spécifiques s_a et s_d, l'erreur moyenne m et le poids p des observations de chaque astronome, et enfin le poids G de chaque observation corrigée.

LIEU DE L'OBSERVATION.	s_a	n_a	s_d	n_d	m	P	M	G	$G' = 1000\,G$
Leipzig	+ 8″,4	7	+ 3″,4	6	±15″,8	1:249	±16″,4	1:268	4
Bonn (Arg.) .	— 4, 5	24	+ 1 ,2	24	±10 ,5	1:111	±10 ,6	1:113	9
Bonn (Schm.)	—20 ,8	2	+ 9 ,55	2	±10 ,5	1:110	±11 ,7	1:138	7
Berlin (Luth).	+ 6 ,55	8	+ 0 ,8	8	± 7 ,6	1: 58	± 7 ,9	1: 62	16

LIEU DE L'OBSERVATION.	s_a	n_a	s_d	n_d	m	P	M	G	$G' = 1000\,G$
Berlin (Galle)	+ 0″,3	2	− 5″,7	2	± 5″,6	1: 31	± 6″,2	1: 39	25
Cambridge . .	+ 9 ,2	10	− 5 ,2	10	± 8 ,5	1: 72	± 8 ,7	1: 76	13
Königsberg . .	− 5 ,0	11	− 1 ,3	11	± 9 ,9	1: 98	±10 ,1	1:102	10
Kremsmünster	+ 1 ,3	8	+ 5 ,7	7	±20 ,1	1:402	±20 ,7	1:429	2
Durham. . . .	− 6 ,0	4	− 6 ,4	4	±21 ,1	1:445	±22 ,4	1:500	2
Rome	− 1 ,5	2	+ 4 ,6	2	±23 ,3	1:546	±26 ,1	1:683	1½
Bilk	+ 5 ,6	3	− 5 ,5	3	± 9 ,1	1: 82	± 9 ,8	1: 96	10
Washington. .	+ 3 ,2	2	+11 ,6	2	±12 ,5	1:156	±13 ,8	1:190	5
Cambr. (Mass.)	+28 ,7	2	+ 4 ,8	2	± 7 ,55	1: 57	± 8 ,4	1: 71	14
Londres. . . .	?	1	?	1	?	?	?	?	?
Paris	− 8 ,6	7	− 2 ,8	6	±12 ,4	1:154	±12 ,8	1:168	6

Ensuite nous trouvons pour les positions normales:

	CORRECTION DE L'ÉPHÉMÉRIDE.		ERREUR MOYENNE.		POIDS $= \Sigma . G'$		$\log.\ V\ \frac{\Sigma . G'}{100}$	
	A. DR.	DÉCL.	A. DR.	DÉCL.	A. DR.	DÉCL.	A. DR.	DÉCL.
Juillet 2,0	− 2″,0	− 1″,2	± 3″,6	± 3″,6	79	75	9,949	9,938
5,5	+ 4 ,6	+ 6 ,4	4 ,3	4 ,3	54	54	9,866	9,866
26,0	+ 1 ,9	+ 5 ,2	3 ,2	3 ,2	97	97	9,993	9,993
Août 4,5	+ 2 ,5	+ 0 ,4	3 ,1	3 ,1	106½	106½	0,013	0,013
22,5	+ 4 ,5	+ 4 ,6	3 ,3	3 ,5	90½	82½	9,978	9,958
Sept. 3,5	− 0 ,9	+ 1 ,2	3 ,1	3 ,1	104½	104½	0,009	0,009
25,5	−11 ,5	− 2 ,5	2 ,7	2 ,7	142	142	0,076	0,076
Oct. 4,0	−20 ,5	+ 2 ,7	2 ,8	2 ,8	132	132	0,060	0,060

De sorte que les positions géocentriques normales deviennent:

Juillet 2,0	12° 48′ 8″,2	+10° 44′ 25″,4
5,5	16 37 12 ,6	10 49 16 ,3
26,0	36 49 48 ,0	9 44 12 ,0
Août 4,5	44 35 56 ,2	8 29 58 ,4
22,5	56 8 14 ,7	5 17 47 ,5
Sept. 3,5	61 24 37 ,8	+ 2 43 22 ,0
25,5	65 53 1 ,2	− 2 22 3 ,1
Oct. 4,0	65 48 12 ,4	− 4 15 13 ,5

On trouve çà et là des préceptes pour calculer les coefficients différentiels $\cos.\ \delta\ \frac{\partial . \alpha}{\partial . \Omega}$, $\frac{\partial . \delta}{\partial . \Omega}$, $\cos.\ \delta \frac{\partial . \alpha}{\partial . i}$, $\frac{\partial . \delta}{\partial . i}$, etc., mais je crois cependant que l'indication d'un système complet de formules, rédigé sous des formes commodes, pourrait être agréable à l'un on l'autre lecteur.

Nommant

α, δ, Δ l'Asc. Droite, la Déclinaison géocentrique, et la distance de la Terre,

Ω, i, π, μ, φ, T, a les éléments de l'orbite,

r, v le rayon vecteur et l'anomalie vraie,

t le temps de l'observation,

x, y, z les coordonnées héliocentriques, rapportées à l'équateur,

a, b, c, A, B, C les constantes de Gauss, étant

$$x = r \sin.\ \mathrm{a} \sin.\ (\mathrm{A} + u)$$
$$y = r \sin.\ \mathrm{b} \sin.\ (\mathrm{B} + u)$$
$$z = r \sin.\ \mathrm{c} \sin.\ (\mathrm{C} + u)$$

u l'Argument de Latitude,

e l'Obliquité moyenne de l'Ecliptique au 1er Janvier 1851,

on commence par calculer les valeurs des constantes

$$-\frac{2}{3\,\mu \sin.\ 1''},\quad + a\,tg.\,\varphi,\quad + a\,\mu\,tg.\,\varphi,\quad - a\cos.\,\varphi,\quad + a^2 \cos.\,\varphi$$

$$- a^2\,\mu \cos.\,\varphi,\quad \frac{2}{\cos.\,\varphi},\quad \tfrac{1}{2}\,tg.\,\varphi,$$

et ensuite le reste du calcul se fait facilement d'après les formules suivantes:

$$-\frac{\sin.\,\alpha}{\Delta} = A \qquad -\frac{\cos.\,\alpha\ \sin.\,\delta}{\Delta} = C$$

$$+\frac{\cos.\,\alpha}{\Delta} = B \qquad -\frac{\sin.\,\alpha\ \sin.\,\delta}{\Delta} = D$$

$$+\frac{\cos.\,\delta}{\Delta} = E$$

$$-\frac{2}{3\mu \sin. 1''} + a\, tg.\varphi.(t-T)\frac{\sin. \nu}{r} = F$$

$$-a\mu\, tg.\varphi.\ \frac{\sin \nu}{r} = G$$

$$-a \cos.\varphi.\ \frac{\cos. \nu}{r} = H$$

$$+a^2 \cos.\varphi.\ \frac{t-T}{r^2} = I$$

$$-a^2 \mu \cos.\varphi.\ \frac{1}{r^2} = K$$

$$+\frac{2}{\cos.\varphi}\sin \nu + \tfrac{1}{2}\, tg.\varphi\ .\ \sin. 2\nu = L$$

$$x \cot.(\mathrm{A}+u) = M \qquad r \cos.\mathrm{a}\ .\ \sin. u = P$$

$$y \cot.(\mathrm{B}+u) = N \qquad r \cos.\mathrm{b}\ .\ \sin. u = Q$$

$$z \cot.(\mathrm{C}+u) = O \qquad r \cos.\mathrm{c}\ .\ \sin. u = R$$

$$Ax + By = S \qquad Cx + Dy + Ez = W$$

$$AM + BN = T \qquad CM + DN + EO = X$$

$$AP + BQ = U \qquad CP + DQ + ER = Y$$

$$A(-y\cos.e - z\sin.c) + B\,x\cos.e = V \qquad C(-y\cos.e - z\sin.e) + D\,x\cos.e + E\,x\sin.e = Z$$

$$\cos.\delta.\frac{\partial.\alpha}{\partial.\mu} = SF + TI \qquad \frac{\partial.\delta}{\partial.\mu} = WF + XI$$

$$\cos.\delta.\frac{\partial.\alpha}{\partial.T} = SG + TK \qquad \frac{\partial.\delta}{\partial.T} = WG + XK$$

$$\cos.\delta.\frac{\partial.\alpha}{\partial.\varphi} = SH + TL \qquad \frac{\partial.\delta}{\partial.\varphi} = WH + XL$$

$$\cos\delta.\frac{\partial.\alpha}{\partial.\Pi} = T \qquad \frac{\partial.\delta}{\partial.\Pi} = X$$

$$\cos.\delta.\frac{\partial.\alpha}{\partial.\Omega} = -T + V \qquad \frac{\partial.\delta}{\partial.\Omega} = -X + Z$$

$$\cos\delta.\frac{\partial.\alpha}{\partial.i} = U \qquad \frac{\partial.\delta}{\partial.i} = Y$$

Les équations suivantes, dont les formules citées sont déduites, peuvent servir pour rendre claire la signification analytique des lettres employées:

$$\cos.\delta.\ \partial.\alpha = (A\,\partial.x + B\,\partial.y) : \sin. 1''$$

$$\partial.\delta = (C\,\partial.x + D\,\partial.y + E\,\partial.z) : \sin. 1''$$

$$\partial.x = x.\frac{\partial.r}{r} + (M\partial.\nu + M\partial.\Pi - (M + y\cos.e + z\sin.e)\,\partial.\Omega + P\,\partial.i)\ \sin. 1''$$

$$\partial.y = y.\frac{\partial.r}{r} + (N\partial.\nu + N\partial.\Pi - (N - x\cos.e)\,\partial.\Omega + Q\,\partial.i)\ \sin. 1''$$

$$\partial.z = z.\frac{d.r}{r} + (O\,\partial.\nu + O\,\partial.\Pi - (O - x\sin.e)\,\partial.\Omega + R\,\partial.i)\ \sin. 1''$$

$$\frac{\partial.r}{r} = (F\partial.\mu + G\partial.T + H\partial.\varphi)\ \sin. 1''$$

$$\partial.\nu = I\partial.\mu + K\partial.T + L\,\partial.\varphi$$

Les huit positions normales donnèrent les 16 équations que voici, où

$$x = \partial.i \qquad u = 1000\ \partial : T$$
$$y = \partial.\Omega \qquad v = \partial.\varphi$$
$$z = \partial.\Pi \qquad w = 100\ \partial.\mu$$

A. Dr.	− 0,077371 x	− 0,114029 y	+ 0,939656 z	− 3,57940 u	+ 2,49964 v	+ 2,85192 w	+ 2″,0	= 0
	− 0,056607	− 0,116527	+ 0,928565	− 3,44047	+ 2,73522	+ 3,09962	− 4 ,6	= 0
	+ 0,077804	− 0,118372	+ 0,913752	− 2,62515	+ 3,69561	+ 4,13270	− 1 ,9	= 0
	+ 0,134212	− 0,114057	+ 0,943327	− 2,32927	+ 3,94930	+ 4,42696	− 2 ,5	= 0
	+ 0,218237	− 0,103385	+ 1,065817	− 1,99064	+ 4,28804	+ 4,86403	− 4 ,5	= 0
	+ 0,260632	− 0,097198	+ 1,194675	− 1,92484	+ 4,50213	+ 5,16066	+ 0 ,9	= 0
	+ 0,326154	− 0,090197	+ 1,510571	− 2,07619	+ 4,96901	+ 5,79902	+11 ,5	= 0
	+ 0,350268	− 0,088439	+ 1,644076	− 2,19754	+ 5,15468	+ 6,04565	+20 ,5	= 0
Décl.	+ 0,329113	+ 0,371902	− 0,153153	+ 0,456882	+ 1,254962	+ 1,412916	+ 1 ,2	= 0
	+ 0,236318	+ 0,376284	− 0,133746	+ 0,436937	+ 1,212181	+ 1,365813	− 6 ,4	= 0
	− 0,319464	+ 0,375256	+ 0,011593	+ 0,148131	+ 0,962961	+ 1,095495	− 5 ,2	= 0
	− 0,566475	+ 0,361567	+ 0,089183	− 0,052053	+ 0,906873	+ 1,034425	− 0 ,4	= 0
	− 0,991306	+ 0,320026	+ 0,240283	− 0,458617	+ 0,949564	+ 1,075813	− 4 ,6	= 0
	− 1,238732	+ 0,284814	+ 0,339631	− 0,716835	+ 1,065855	+ 1,194389	− 1 ,2	= 0
	− 1,607820	+ 0,210789	+ 0,496965	− 1,098336	+ 1,338618	+ 1,463449	+ 2 ,5	= 0
	− 1,714281	+ 0,180176	+ 0,536373	− 1,190544	+ 1,415991	+ 1,530937	− 2 ,7	= 0

Les derniers termes de ces équations ayant des poids inégaux, elles doivent être multipliées par les racines carrées des poids déjà cités, $\Sigma G'$ ou par des nombres proportionnels. Cependant le traitement entier des équations était déjà achevé, avant que je reçus les positions des étoiles de comparaison de M. Yvon Villarceau, et il est clair que les poids trouvés pour la seconde fois différèrent si peu des poids d'auparavant qu'il ne valait pas la peine de refaire la solution entière. Voici donc ces poids de la première solution et les logarithmes des facteurs, par lesquels les équations ont été multipliées.

	$\Sigma . G'$		$\log . \sqrt{\frac{\Sigma . G'}{100}}$	
	A. DR.	DÉCL.	A. DR.	DÉCL.
Juillet 2,0	94	90	9,987000	9,977000
5,5	58	58	9,882000	9,882000
26,0	102	102	0,004000	0,004000
Août 4,5	$107\frac{1}{2}$	$107\frac{1}{2}$	0,016000	0,016000
22,5	$93\frac{1}{2}$	$84\frac{1}{2}$	9,958000	9,964000
Sept. 3,5	113	113	0,027000	0,027000
25,5	144	144	0,079000	0,079000
Oct. 4,0	136	136	0,067000	0,067000

Les équations à poids égaux, (dont l'erreur moyenne fut $\pm 3'',16 = \sqrt{10}$,) qui résultèrent de cette multiplication, ayant été traitées selon les préceptes de la méthode des moindres carrés, donnèrent

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
11,33766\,x & -1,903640\,y & -1,027979\,z & +3,71913\,u & -1,43486\,v & -1,13884\,w & -21'',4729 & =0 \\
-1,903640 & +0,868511 & -0,602429 & +1,461441 & -0,798836 & -0,987285 & +7\,,6749 & =0 \\
-1,027979 & -0,602429 & +13,74197 & -25,95920 & +46,24135 & +53,12973 & -61\,,267 & =0 \\
+3,71913 & +1,461441 & -25,95920 & +57,18649 & -86,41406 & -98,76193 & +74\,,321 & =0 \\
-1,43486 & -0,798836 & +46,24135 & -86,41406 & +164,1543 & +188,3401 & -178\,,227 & =0 \\
-1,13884 & -0,987285 & +53,12973 & -98,76193 & +188,3401 & +216,1759 & -210\,,842 & =0
\end{array}$$

dont la solution, après l'élimination des quatre inconnues x, y, z et u donna les deux équations:

$$\begin{array}{l}
2,9945\,v + 3,1030\,w - 23'',866 = 0, \\
3,1030\,v + 3,2156\,w - 24\,,773 = 0,
\end{array}$$

dont la première, multipliée par $\frac{3,1030}{2,9945}$, donna

$$3,1030\,v + 3\,2154\,w - 24,731 = 0$$

par où l'on voit qu'il n'y a aucune chance de déterminer par cette solution l'inconnue w avec quelque certitude. J'ai donc pris le chemin que voici, qui a été suivi, du moins en partie, par M. Yvon Villarceau. Laissant indéterminée l'inconnue w, on obtient pour les autres inconnues les valeurs qui suivent, où j'ai remplacé w par $100\ \partial.\mu$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \partial.i = -\ 6'',46 && -\ 11,8789\ \partial.\mu \\ y &= \partial.\Omega = -\ 19'',18 && -\ 34,2296\ \partial.\mu \\ z &= \partial.\Pi = -\ 39'',835 && -\ 47,4821\ \partial.\mu \\ \tfrac{1}{1000}\,u &= \partial.T = -\ 0^{j},003829 && -\ 0,0037896\ \partial.\mu \\ v &= \partial.\varphi = +\ 7'',97 && -\ 103,6234\ \partial.\mu \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{I})$$

Ces valeurs étant substituées dans les seize équations à poids égaux, il y restait encore les différences suivantes:

Calcul — Observation.

Asc. Droite.	Déclinaison.
$+\ 0'',82 - 0,058\ \partial.\mu$	$+\ 5'',97 + 0,1413\ \partial.\mu$
$-\ 3,01 + 0,106\ \partial.\mu$	$-\ 1,39 - 0,0163\ \partial.\mu$
$+\ 3,03 + 0,007\ \partial.\mu$	$-\ 3,73 - 0,4018\ \partial.\mu$
$+\ 1,73 - 0,205\ \partial.\mu$	$+\ 0,22 - 0,2233\ \partial.\mu$
$-\ 4,40 - 0,054\ \partial.\mu$	$-\ 4,22 + 0,3075\ \partial.\mu$
$-\ 3,46 + 0,3605\ \partial.\mu$	$-\ 1,01 + 0,5815\ \partial.\mu$
$-\ 1,81 + 0,423\ \partial.\mu$	$+\ 4,70 + 0,0983\ \partial.\mu$
$+\ 4,57 - 0,526\ \partial.\mu$	$-\ 0,70 - 0,4621\ \partial.\mu$

..... (II)

dont la somme des carrés est:

$$170,33 - 7,326\ \partial.\mu + 1,5325\,(\partial.\mu)^2$$

La formule connue

$$[\varepsilon\varepsilon] = [an]\,x + [bn]\,y + [cn]\,z + [dn]\,u + [en]\,v$$

(notation de M. Encke, *Berl. Astr. Jahrb.* 1834, 35, 36) donne le contrôle du calcul. Chaque terme du second membre consiste dans notre cas d'un trinome de la forme $\alpha + \beta\,\partial.\mu + \gamma\,(\partial.\mu)^2$, et leur somme donne

Termes positifs	$2749,55$	$+\ 233267\ \partial.\mu$	$+\ 2203918\ (\partial.\mu)^2$
Termes négatifs	$-\ 2579,33$	$-\ 233275\ \partial.\mu$	$-\ 2203916\ (\partial.\mu)^2$
	$170,22$	$-\ 8\ \partial.\mu$	$+\ 2\ (\partial.\mu)^2$,

4

ce qui confirme l'exactitude du calcul, autant que comporte l'usage des tables à six décimales.

En cherchant la valeur de $\partial . \mu$ qui rend la somme des carrés des erreurs un minimum, on trouve

$$\partial . \mu = + \frac{7,326}{3,065} = + 2'',3906$$

$$[\varepsilon\varepsilon] = 161'',57$$

L'erreur moyenne de chaque équation devient

$$\sqrt{\frac{161,57}{16-6}} = \pm 4'',02$$

tandis que la formation des positions normales a donné ± 3'',16.

Le système correspondant des éléments est celui-ci :

$$\begin{aligned} i &= \ 13^\circ\, 55'\, 36'',65 \\ \Omega &= 148\ 25\ 38\ ,99 \\ \pi &= 322\ 57\ 12\ ,59 \end{aligned} \Big\} \text{ Equin. Moyen 1 Janv. 1851.}$$

$$\begin{aligned} T &= \text{Juillet } 8,724347 \text{ T. M. de Berlin,} \\ \varphi &= \ 41^\circ\, 18'\ 1'',92 \\ \mu &= 553'',25528 \end{aligned}$$

En variant la valeur de μ de + 5'', et de — 5'', et en appliquant aux autres éléments les changements correspondants, j'obtins deux autres systèmes *D* et *E*, lesquels étant comparés avec les positions normales, laissèrent encore les différences suivantes. Quant aux différences présumées qui y sont ajoutées, il faut remarquer que les quantités (II) regardent les seize équations à poids égaux, et qu'ainsi il faut les diviser chacune par son poids $\sqrt{\frac{\Sigma G'}{100}}$.

			DIFFÉRENCES TROUVÉES CALC. — OBS.			DIFFÉRENCES PRÉSUMÉES CALC.— OBS.			EXCÈS DES DIFF. TROUVÉES SUR LES DIFF. PRÉSUMÉES.		
			C	*D*	*E*	*C*	*D*	*E*	*C*	*D*	*E*
Asc. Dr.	Juill.	2,0	+0",3	− 8",5	−0",8	+0",7	+0",4	+1",0	−0",4	− 8",9	−1",8
		5,5	−5 ,0	−12 ,7	−6 ,0	−3 ,6	−2 ,9	−4 ,3	−1 ,4	− 9 ,8	−1 ,7
		26,0	+2 ,2	− 9 ,8	+2 ,2	+3 ,0	+3 ,0	+3 ,0	−0 ,8	−12 ,8	−0 ,8
	Août	4,5	−0 ,4	−13 ,1	+0 ,2	+1 ,2	+0 ,2	+2 ,2	−1 ,6	−13 ,3	−2 ,0
		22,5	−6 ,2	−20 ,8	−5 ,2	−4 ,7	−5 ,0	−4 ,4	−1 ,5	−15 ,8	−0 ,8
	Sept.	3,5	−2 ,5	−16 ,6	−5 ,8	−2 ,4	−0 ,8	−4 ,1	−0 ,1	−15 ,8	−1 ,7
		25,5	−2 ,2	−16 ,8	−3 ,7	−0, 7	+1 ,1	−2 ,4	−1 ,5	−17 ,9	−1 ,3
	Oct.	4,0	+0 ,3	−18 ,9	+4 ,0	+2 ,8	+0 ,6	+5 ,1	−3 ,1	−19 ,4	−1 ,1
Décl.	Juill.	2,0	+6 ,4	+ 3 ,9	+5 ,6	+6 ,7	+7 ,4	+5 ,9	−0 ,3	− 3 ,5	−0 ,3
		5,5	−2 ,5	− 6 ,5	−2 ,3	−1 ,9	−2 ,0	−1 ,8	−0 ,6	− 4 ,5	−0 ,5
		26,0	−4 ,5	− 9 ,7	−3 ,0	−4 ,6	−6 ,6	−2 ,7	+0 ,1	− 3 ,1	−0 ,3
	Août	4,5	−0 ,9	− 4 ,1	+0 ,5	−0 ,3	−1 ,3	+0 ,8	−0 ,6	− 2 ,8	−0 ,3
		22,5	−4 ,1	− 5 ,7	−5 ,8	−3 ,8	−2 ,1	−5 ,5	−0 ,3	− 3 ,6	−0 ,3
	Sept.	3.5	+0 ,3	− 0 ,5	−2 ,6	+0 ,4	+3 ,1	−2 ,3	−0 ,1	− 3 ,6	−0 ,3
		25,5	+3 ,5	− 0 ,2	+3 ,3	+4 ,1	+4 ,5	+3 ,8	−0 ,6	− 4 ,7	−0 ,5
	Oct.	4,0	−2 ,3	− 8 ,7	0 ,0	−1 ,5	−3 ,5	+0 ,4	−0 ,8	− 5 ,2	−0 ,4

Les excès des différences trouvées sur les différences présumées tiennent évidemment aux puissances supérieures des corrections des éléments, que nous avons négligées jusqu'ici, ce qui est confirmé par la considération que les excès, trouvés pour le système *D* sont 9 à 10 fois plus grands que ceux, qu'ont fournis les systèmes *C* et *E*, et que, pour parvenir des éléments primitifs au système *D*, nous avons varié μ et les autres éléments à peu près 3 fois plus que pour en déduire les systèmes *C* et *E*.

En effet, il est facile de démontrer qu'une fois le système le plus probable *C* ayant été constitué et si l'on en augmente la valeur μ de la quantité $\Delta\,.\,\mu$, alors pour rendre un minimum la somme des carrés des erreurs restantes, les autres éléments devront subir des changements correspondants qui peuvent s'exprimer par des séries de la forme

$$\alpha\Delta\,.\,\mu + \beta(\Delta\,.\,\mu)^2 + \gamma(\Delta\,.\,\mu)^3 + \text{etc.}$$

Puis, en comparant ce système avec les positions normales, les erreurs restantes, et enfin la somme de leurs carrés pourront être exprimées par des séries semblables, mais qui contiennent encore pour premier terme un nombre constant. Dans notre cas le terme contenant le carré de $\Delta\,.\,\mu$ commence donc à devenir sensible.

La régularité qui existe dans les excès trouvés pour le système *D* fait qu'on peut les faire disparaître presque entièrement de diverses manières; par exemple en changeant la Longitude du Périhélie seule, la correction la plus probable est — 12″,7 et les erreurs restantes deviennent assez petites; mais si l'on applique la méthode des moindres carrés, en employant les coefficients qui ont servi pour le premier système, on trouve

$$\begin{aligned} x &= \partial . i = + 0'',54 \\ y &= \partial . \Omega = + 2\ ,05 \\ z &= \partial . \pi = + 4\ ,65 \\ \tfrac{1}{1000}\, u &= \partial . T = + 0\ ,00041 \\ v &= \partial . \varphi = + 2'',50 \end{aligned}$$

Les erreurs restantes dans les seize équations à poids égaux sont

+ 0″,5 — 2″,3 + 2″,6 + 0″,5 — 5″,7 — 0″,7 + 2″,1 + 0″,8,
+ 7 ,0 — 2, 3 + 6, 55 — 1 ,05 — 2, 1 + 3 ,6 + 5 ,5 — 4 ,3,

dont la somme des carrés = 214,77.

Les valeurs que nous venons de trouver pour les corrections des éléments nous permettent d'ajouter maintenant aux corrections (I) du système primitif les termes contenant le carré de $\Delta . \mu$. Les corrections deviennent donc

$$\left.\begin{aligned} \partial . i &= -\ 6'',46 - 11,8789\ \Delta . \mu + 0,0098\ (\Delta . \mu)^2 \\ \partial . \Omega &= -\ 19\ ,18 - 34,2296\ \Delta . \mu + 0,0376\ (\Delta . \mu)^2 \\ \partial . \pi &= -\ 39\ ,835 - 47,4821\ \Delta . \mu + 0,0850\ (\Delta . \mu)^2 \\ \partial . T &= -\ 0^j,003829 - 0,0037896\ \Delta . \mu + 0,0000074\ (\Delta . \mu)^2 \\ \partial . \varphi &= -\ 7'',97 - 103,6234\ \Delta . \mu + 0,0458\ (\Delta . \mu)^2 \\ \partial . \mu &= \Delta . \mu \end{aligned}\right\} . \quad \text{(III)}$$

De plus, il est clair que dans l'équation

$$[\varepsilon\varepsilon] = 170,33 - a\,\Delta . \mu + b\,(\Delta . \mu)^2$$

qui nous a servi pour déterminer la valeur la plus probable de $\Delta . \mu$, le coefficient *a* de $\Delta . \mu$ a été exact autant que l'usage des tables à six décimales l'a permis, mais le terme contenant $(\Delta . \mu)^2$ ayant été négligé dans les valeurs des erreurs restantes, il s'en suit que dans la somme de leurs carrés le coefficient de ce terme ne peut pas être exact. Connaissant la somme mi-

nima des carrés des erreurs 214,77 pour une valeur $\Delta.\mu = 7'',3906$, nous avons pour déterminer ce coefficient:

$$214,77 = 170,33 - 54,14 + 54,61\, b$$

d'où

$$b = +\,1,805$$

On peut obtenir pour la valeur la plus probable de $\Delta.\mu$ une seconde approximation si l'on cherche la valeur qui rend un minimum la nouvelle expression pour la somme des carrés des erreurs. On trouve

$$\Delta.\mu = \frac{a}{2\,b} = \frac{7,326}{3,610} = +\,2'',029$$

$$[\varepsilon\varepsilon] = 162,9$$

Maintenant nous sommes en état de déterminer a priori la somme minima des carrés des erreurs qui resteront si l'on fait varier $\Delta.\mu$ encore de quelques secondes. Par exemple, en augmentant et en diminuant de 10″ la valeur de μ qui appartient au système *C*, et en déterminant les autres éléments à l'aide des formules (III), nous aurons deux autres systèmes *F* et *G* pour lesquels $\Delta.\mu$ aura les valeurs $+\,12'',3906$ et $-\,7'',6094$. En les substituant dans la formule

$$[\varepsilon\varepsilon] = 170,33 - 7,326\,\Delta.\mu + 1,805\,(\Delta.\mu)^2,$$

nous trouvons pour les systèmes *F* et *G* respectivement:

356,7 et 330,7

J'ai, en effet, formé ces deux systèmes et les ai comparés tous les deux aux positions normales. La somme des erreurs restantes, multipliées par les poids a été

380,2 et 308,7

La méthode des moindres carrés donna les corrections les plus probables

		du système *F*	du système *G*
	$x = \partial.i$	$+\ \ 1'',36$	$-\ \ 1'',49$
	$y = \partial.\Omega$	$+\ \ 5\ ,50$	$-\ \ 8\ ,12$
	$z = \partial.\pi$	$+\ 13\ ,12$	$-\ \ 1\ ,79$
$\frac{1}{1000}$	$u = \partial.T$	$+\ \ 0\ ,00113$	$+\ \ 0\ ,00171$
	$v = \partial.\varphi$	$-\ \ 3'',04$	$+\ \ 1'',71$

et la somme $[\varepsilon\varepsilon]$ devint

$$305{,}0 \text{ et } 248{,}0$$

étant encore inférieure l'une de 51,7, l'autre de 82,7 unités aux nombres présumés.

La diversité des corrections, trouvées pour les systèmes *F* et *G* confirme ce qui a été remarqué ci-dessus, qu'on peut faire disparaître d'une infinité de manières les erreurs restantes dues aux corrections du second ordre des éléments.

La question à résoudre maintenant est: quelle peut être l'incertitude du moyen mouvement diurne, et ensuite du temps de révolution? Il va sans dire que la réponse à cette question est des plus difficiles. D'un côté la théorie de la méthode des moindres carrés nous apprend à trouver les limites entre lesquelles on peut parier un contre un que l'inconnue μ doit se trouver. Le facteur qu'a obtenu w dans la dernière équation de la solution est égal à son poids. Cette dernière équation, a été

$$0{,}0002\, w - 0{,}042 = 0$$

Ayant trouvé ci-dessus par un détour, qu'au lieu de la valeur $w = 210$ qui résulte de cette équation la vraie valeur est

$$w = 239'',06$$

nous pouvons déterminer le facteur de w avec un peu plus de précision. On trouve donc

$$0{,}000176\, w - 0{,}042 = 0$$

pour cette équation. Le poids de la valeur trouvée de w s'exprime donc par le facteur qu'il a dans cette équation, et en se rappelant que l'erreur moyenne des seconds membres des seize équations à poids égaux a été trouvée *a posteriori* égale à $\pm$ 4'',02, on trouve pour l'erreur probable de w

$$\pm\, 0{,}6745 \times \frac{4'',02}{\sqrt{0{,}000176}} = \pm\, 204$$

et pour l'erreur probable de $\Delta\mu$ $\pm$ 2'',04.

De l'autre côté la comète d'Encke nous a appris que si l'on cherche un orbite qui s'appuie sur quelques apparitions, alors les erreurs, qui restent à la comparaison des éléments avec les positions normales, sont beaucoup plus grandes que celles qu'on trouve si l'orbite doit représenter les observations d'une seule apparition. Au quatrième Mémoire sur cette comète, (*Mathem. Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1842) on trouve un tableau des erreurs restantes après la comparaison des éléments à 22 positions normales formées des observations faites aux apparitions de 1818 et 19, 1825, 1828, 1835 et 1838. Les apparitions de 1822 et de 1832 ont été rejetées dans cette solution afin d'avoir seulement des observations faites avant le passage au périhélie. Quoique la grandeur des fautes puisse être nommée sans doute satisfaisante, néanmoins dans toutes les erreurs restantes, qui appartiennent à une même apparition, il y a une marche plus ou moins régulière qui indique que chaque apparition prise à part peut être représentée beaucoup mieux que par le système III qui embrasse sept révolutions. C'est pourquoi je crois que pour être sûr, il ne faut pas trop se fier à l'erreur probable trouvée ci-dessus.

Je finirai par citer ici les cinq systèmes *F, D', C', E', G*, dont *D', C'* et *E'* sont les systèmes *D, C, E*, corrigés des termes qui renferment $(\Delta \, . \, \mu)^2$; j'y ajouterai les erreurs qui résultent de leur comparaison avec les positions normales.

	F	*D'*	*C'*	*E'*	*G*
T Juillet	8,687588	8,705809	8,724389	8,743345	8,762671
Π	322° 49′ 30″,8	322° 53′ 19″,8	322° 57′ 13″,1	323° 1′ 10″,6	323° 5′ 12″,3
☊	148 20 2 ,5	148 22 49 ,9	148 25 39 ,2	148 28 30 ,4	148 31 23 ,5
i	13 53 39 ,4	13 54 37 ,8	13 55 36 ,7	13 56 36 ,1	13 57 36 ,0
φ	41 0 52 ,7	41 9 26 ,3	41 18 2 ,2	41 26 40 ,3	41 35 20 ,8
μ	563″,25528	558″,25528	553″,25528	548″,25528	543″,25528
Temps de rév.	2300ʲ,910	2321ʲ,519	2342ʲ,499	2363ʲ,857	2385ʲ,619
Prochain pass. au Périh. 1857.	Sept. 25,598	Oct. 16,225 Temps	Nov. 6,223 Moyen de	Nov. 27,600 Berlin	Déc. 19,382

Les longitudes du Périhélie et du Noeud Ascendant sont comptées de l'Equinoxe moyen du 1er Janvier 1851.

Les éléments doivent être considérés comme des éléments osculateurs pour le 29 Juin 1851.

Erreurs restantes
à la comparaison avec les positions normales.

		F		D'		C'		E'		G	
		A. Dr.	Décl.	A. Dr.	Décl.	A. Dr.	Décl.	A. Dr.	Décl.	A. Dr.	Décl.
Juillet	2,0	+0",2	+5",4	+0",5	+7",5	+1",2	+6",8	+0",3	+6",0	+0",5	+3",7
	5,5	−2 ,7	−4 ,5	−3 ,1	−3 ,0	−4 ,0	−2 ,1	−4 ,8	−1 ,9	−5 ,1	−2 ,5
	26,0	0 ,0	−9 ,7	+2 ,6	−6 ,5	+3 ,5	−4 ,2	+3 ,6	−2 ,6	+2 ,5	−0 ,7
Août	4,5	−4 ,0	−2 ,8	+0 ,2	−1 ,0	+1 ,0	−0 ,6	+1 ,9	+0 ,9	+3 ,3	+2 ,1
	22,5	−7 ,1	−0 ,6	−6 ,0	−2 ,3	−4 ,6	−3 ,7	−3 ,3	−5 ,4	−4 ,2	−7 ,3
Septembre	3,5	+0 ,8	+6 ,2	−0 ,6	+3 ,4	−0 ,8	+0 ,7	−3 ,8	−2 ,1	−5 ,4	−4 ,9
	25,5	+5 ,3	+5 ,1	+1 ,8	+4 ,6	−0 ,2	+4 ,0	−1 ,4	+3 ,9	−2 ,8	+3 ,1
Octobre	4,0	+1 ,7	−5 ,4	+0 ,8	−3 ,7	+2 ,4	−1 ,8	+6 ,5	+0 ,6	+8 ,6	+2 ,4

Il résulte donc qu'on peut faire varier le moyen mouvement diurne de vingt secondes, ce qui est équivalent à un changement de 85 jours dans la période de révolution, et quoique sans doute les positions normales soient représentées le mieux par le système moyen, néanmoins les autres systèmes laissent des fautes si petites qu'il faut les considérer comme également possibles.

L'incertitude de ± 5" dans le moyen mouvement, soupçonnée par M. Yvon Villarceau, est donc doublée par ces considérations.

ERRATA.

Page	*Ligne*	*Au lieu de*	*Lisez :*
1	19	convaincut	convainquit
3	3	posible	possible
"	29	grande chose	grand' chose
4	3	changeante	changeant
"	12	deviennent	devient
6	29	attint	atteignit
8	6	ainsi qu'on	de sorte qu'on
14	7	Exentricité	Excentricité
"	8	Demie grande axe	Demi-grand axe
"	14	perturbatons	perturbations
"	29	pependiculaire	perpendiculaire

BIJDRAGE

TOT DE

ANATOMIE EN PHYTOGRAPHIE DER SPHAGNA.

DOOR

F. DOZY.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

MET TWEE PLATEN.



AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1854.

BIJDRAGE

TOT DE

ANATOMIE EN PHYTOGRAPHIE DER SPHAGNA.

DOOR

F. DOZY.

Een naauwkeurig onderzoek der vormen en bouw van de plantencellen wordt thans, bij de vorderingen in plantenkennis, meer en meer noodzakelijk geacht voor eene goede plantenbeschrijving en soortsbepaling. Het is vooral onmisbaar bij eene zoo natuurlijke groep, als die der *Sphagna*. Dr. K. Müller zegt daarom te regt, in zijne beschrijving van *Sph. sericeum, Bot. Zeit.* 5 *Jahrg.*, 28 *St.*, dat het bladnet der *Sphagna* bijna het eenigste *kriterium* daarstelt, waardoor de soorten van dit geslacht met zekerheid kunnen onderscheiden worden. Wanneer men dit *kriterium* van iedere soort gevonden heeft, dan is men eerst in staat, om met vrucht de ontwikkeling dier plantensoorten in hare talrijke vormen, in de natuur na te gaan, ten einde daarvan eene juiste kennis te verkrijgen. De soorten van *Sphagnum* vertoonen namelijk zulk eene gelijkvormigheid in hare zamengestelde organen, dat men, zonder het mikroskopisch onderzoek van het celweefsel, ligt in twijfel zou geraken, of niet het verschil, dat men bij hen bespeurt in steng- en takverdeeling, getal en rigting dier deelen, als ook in bladvorm, van toevallige omstandigheden afhangt, b. v. van eene min of meer vochtige groeiplaats, van den verschillenden leeftijd der plant en van anderen uitwendigen invloed. Toen ik, eenige jaren geleden, de inlandsche soorten van *Sphagnum* begon te onderzoeken,

en tot dat einde verschillende streken van ons land had bezocht, liet ik om die reden mikroskopische afteekeningen maken van alle vormen, waarin ik soortsverschil meende op te merken. Daaruit bleek mij, onder anderen, reeds spoedig, dat *Sph. capillifolium* Ehrh., welk mos door vele bryologen wegens zijne gelijkvormigheid met *Sph. acutifolium* Ehrh. wordt vereenigd, daarvan integendeel als eene degelijke soort moet onderscheiden worden, en wel hoofdzakelijk door de wijdere en grootere cellen van zijne bladen. Later heb ik ook, door het onderzoek der stengbladen van *Sph. tenue*, volgens Nees eene varieteit van *Sph. acutifolium*, een standvastig verschil in het celweefsel opgemerkt, waardoor het als eene bijzondere soort gemakkelijk kan worden onderscheiden. Het verschil is daarin gelegen, dat het bovenste gedeelte der stengbladen van *Sph. tenue* steeds gescheurd is, zoodat daarvan slechts draadvormige overblijfsels der cellenwanden zigtbaar zijn, en dat zelfs daarenboven de wanden der poreuse cellen in het overige gedeelte van die bladen, waarschijnlijk door resorptie, geheel vernietigd zijn; Pl. I, *Fig.* 6. Bij de behandeling dezer bladen met jodiumtinktuur en zwavelzuur ziet men tevens zeer duidelijk de tusschencellige gangen, die door de zamenvoeging der naburige cellenwanden ontstaan, en waarvan de overblijfsels aan de resorptie het langst weêrstand schijnen te bieden. In een ander geval deed mij het mikroskopisch onderzoek van het celweefsel zeer van elkander afwijkende vormen vereenigen, die vroeger als bijzondere soorten zijn beschouwd geworden. Alvorens echter tot zoodanige vereeniging te besluiten, is het noodig, dat men de afwijkingen in vorm, die door de genoemde omstandigheden bij eene door het celweefsel goed gekarakteriseerde soort worden te weeg gebragt, in de natuur waarneme. Tot voorbeeld strekt een zeer zonderlinge vorm van *Sph. cuspidatum*, die onder den naam van *Sph. plumosum* het eerst door Nees ab Esenbeck is bekend gemaakt. De gelijkvormigheid van het celweefsel, gepaard aan de waarneming dier plant op hare groeiplaats, brengt tot het besluit, dat dit mos, niettegenstaande het groot verschil in *habitus* enz., voor eene jonge plant van *Sph. cuspidatum* moet gehouden worden, zoo als die zich, het eerst, door ontkieming der sporen in het water ontwikkelt. Zij is dan ook minder juist als eene varieteit van genoemde soort in den *Prodromus Florae Batavae* vermeld, en behoort slechts als een jeugdige vorm onderscheiden te worden. De jongere planten van andere soorten van *Sphagnum* wijken ook dikwijls in vorm en *habitus* van de oudere vruchtdragende zeer af. De laatste vertoonen eerst den waren *typus* der soort,

en, voor zooveel mij bekend is, heeft men nimmer *Sph. plumosum* met vruchten aangetroffen. In hetzelfde geval verkeert de onder water groeijende vorm van *Sph. subsecundum,* die door BRIDEL als soort is beschreven onder den naam van *Sph. denticulatum,* wegens zijne zonderlinge en van alle soorten van *Sphagnum* afwijkende stengel en bladen. De waarneming dezer plant en van hare overgangsvormen in de natuur, zoo als zij b. v. in de vijvers en slooten bij Zeijst groeit, heeft mij haar als een bijzonderen vorm met de genoemde soort doen vereenigen.

Het onderzoek der Indische *Sphagna,* die zich in het *herbarium Junghuhnianum* bevinden, heeft mij eenige bijzonderheden in de celstruktuur der bladen doen opmerken, waardoor zij zoowel onderling als van de overige bekende soorten duidelijk verschillen. Dr. K. MÜLLER heeft daarvan reeds eene soort beschreven, onder den naam van *Sph. sericeum;* de andere heb ik onderscheiden als *Sph. Gedeanum, Sph. Junghuhnianum* en *Sph. Hollianum.* In de *Bryologia Javanica* zal men die, uitvoerig beschreven en afgebeeld, aantreffen *. Het is mij voorgekomen, dat deze Indische soorten onze kennis van de bewerktuiging dezer merkwaardige plantengroep zeer vermeerderen, en dat zij welligt kunnen strekken, om eenig meerder licht te verspreiden over de morphologische en physiologische beteekenis van het eigenaardig celweefsel, hetgeen tot nog toe bij geene andere plantengroep is waargenomen. Onze kennis van de bewerktuiging der *Sphagna* berustte tot hiertoe hoofdzakelijk op het onderzoek der Europesche soorten. Uit de overige werelddeelen waren slechts weinige soorten, en dan nog zeer onvolkomen, door eene oppervlakkige beschrijving bekend gemaakt. Het Amerikaansch *Sph. macrophyllum* BERNH. toonde echter reeds een opmerkelijk verschil aan van de Europesche *Sphagna,* door het gemis van die fraaije spiraalvezelcellen, welke in deze planten zoozeer ieders bewondering wekken.

De celstruktuur der *Sphagna* is het eerst door MOLDENHAWER in haren waren aard begrepen en daarna, in 1837, door HUGO MOHL uitvoerig onderzocht en aangetoond. De beroemde bryoloog Dr. W. P. SCHIMPER, in zijne *Recherches anatomiques et morphologiques sur les mousses,* Strasbourg 1848, als ook Dr. H. SCHACHT, *Ueber die Pflanzenzelle* etc., Berlin 1852, hebben door herhaald onderzoek allen twijfel, die daaromtrent nog mogt bestaan, opgeheven.

---

* *Bryologia Javanica seu Descriptio muscorum frondosorum Archipelagi Indici iconibus illustrata. auct.* F. DOZY et J. H. MOLKENBOER; Fasc. I Lugd. Bat. apud A. W. SYTHOFF.

Het is aan die kruidkundigen gebleken, dat er in de bladen van *Sphagnum* twee cellenstelsels gevonden worden, waarvan het een meer onmiddellijk dient tot voeding der plant, het andere waarschijnlijk het opslurpend vermogen van die gewassen vermeerdert. Alle deze cellen zijn in eene enkele laag aan elkander gevoegd. De basis van de bladen loopt eenigzins langs de steng af; hare cellen zijn daar aan de uitwendige cellenlaag der steng gehecht, waardoor het opzuigen van het vocht uit de steng des te sneller geschiedt. Die plaatsing der cellen in eene enkele laag, waaromtrent de Indische soorten geene uitzondering maken, onderscheidt de *Sphagna* van de *Leucobryaceën*.

De bladcellen zijn oorspronkelijk aan elkander gelijk; doch weldra ziet men daarvan tweederlei vormen ontstaan, namelijk verlengd-cylindrische, vochthoudende, met groen cellenstof gevulde cellen, die, door aansluiting van de eene op de andere in eene schuinsche rigting, de mazen van het bladnet uitmaken, waartusschen vrij regelmatig groote wijdere poreuse cellen geplaatst zijn, die bij alle Europesche soorten van *Sphagnum* dwars, ringvormig of spiraalsgewijze gestreept zijn. De vorming der spiraal in die cellen schijnt eene secundaire formatie te zijn, en wordt het best verklaard door aan te nemen, dat het cellenstof zich hier aan den binnenwand dier cellen als een spiraalvezel aanzet, terwijl die aanzetting integendeel in andere cellen eene gelijkmatige verdikking der cellenwand ten gevolge heeft. Gelijktijdig met die spiraalvorming schijnt er in die cellen lucht ontwikkeld te worden, waardoor zij blaasvormig worden uitgezet en eenen veel grooteren omvang verkrijgen, dan de hen omringende, naauwere, groene cylindrische cellen.

Die spiraal nu ontbreekt in sommige soorten uit andere werelddeelen, *Sph. macrophyllum* Bernh., *Sph. sericeum* Müll., en in ons *Sph. Hollianum*. Wat daarvan de reden zij, is moeijelijk te gissen. Het is echter opmerkelijk, dat men die ook niet vindt in de stengbladen van verscheidene Europesche soorten, noch in die van *Sph. Gedeanum*, en dat men ze slechts bij uitzondering aantreft in de bladen van de zoogenaamde vruchtsteel. De naam van poreuse cellen schijnt mij daarom bij de beschrijving der *Sphagna* verkieslijker toe, dan die van spiraalvezelcellen, om ze van de andere cellen te onderscheiden.

In den regel staan de poreuse cellen geïsoleerd tusschen de hen omringende groene cellen, die gewoonlijk 5—7 in getal zijn; b. v. in de takbladen van *Sph. Gedeanum*, Pl. I, *Fig.* 1; de zeer fijn spiraalvezelige cellen van *Sph. Junghuhnianum*, Pl. I, *Fig.* 3; die van de takbladen van *Sph. tenue*, Pl. I, *Fig.* 7. In de stengbladen van *Sph. Hollianum*, Pl. II, *Fig.* 12, en

in die van *Sph. Gedeanum*, Pl. I, *Fig.* 2, zijn die poreuse cellen vrij regelmatig gepaard, of wel drie in getal, schuinsch op elkander geplaatst. Deze drie cellen evenaren dan bijna in grootte eene gepaarde cel. In het eerst meende ik in deze bladen geïsoleerde cellen, met een dikke spiraalvezel voorzien, op te merken; maar bij sterkere vergrooting en aanwending van jodiumtinktuur met zwavelzuur, zag ik het gekleurde vocht tusschen den cellenwand vloeijen, die de gepaarde cellen scheidt; zoodat de schijnbare spiraalvezel een tusschencellige gang bleek te zijn. De bladen van *Sph. sericeum*, Pl. II, *Fig.* 8 en 11 vertoonen ook wel van die gepaarde cellen, tusschen het groen celweefsel geplaatst; maar niet zoo regelmatig als bij *Sph. Hollianum*. Eene gepaarde cel is hier weder bijna even groot, als eene geïsoleerde cel. Overigens zag ik ook dergelijke cellen zeer regelmatig geordend, in de stengbladen van *Sph. acutifolium*, Pl. I, *Fig.* 4, en in die van *Sph. tenue* twee of drie, maar in verschillende rigting aan elkander gevoegd, Pl. I *Fig.* 6.

Eene andere bijzonderheid, die door de genoemde kruidkundigen, maar vooral door Schimper duidelijk is gezien, is het voorkomen van poren in de wanden der spiraalcellen. Hij plaatste namelijk de bladen van *Sphagnum* in water, waarin zich vele monaden bevonden, en zag er toen eenige door de poren in die cellen kruipen en alle pogingen in het werk stellen, om er weder uit te komen. Het bestaan dezer doorboringen van den cellenwand was vroeger door Meijen, in zijne door de Haarlemsche Maatschappij bekroonde prijsverhandeling en in een afzonderlijk uitgegeven werk, *Ueber die neueste Forschritte der Anatomie und Physiologie der Gewächse*, 1836, ontkend. Hij zag die ronde figuren voor ringvormige vezels in den cellenwand aan. Ik heb die proef met monaden niet herhaald, omdat ik door kleuring der bladen met jodiumtinktuur en zwavelzuur voldoende opheldering, aangaande het bestaan der poren, meende verkregen te hebben. De cellenwand vertoont zich ter plaatse, waar de poren gelegen zijn, lichter gekleurd; zeldzaam ongekleurd. Het laatste bewijst de doorboring van den voor- en daartegen overgestelden achterwand der cel. Eene vernietiging van den geheelen cellenwand ziet men in de stengbladen van *Sph. tenue*, Pl. I, *Fig.* 6. Het eerste toont, in elk geval, eene aanmerkelijke verdunning der cellenwand aan, terwijl het de vooronderstelling toelaat, dat slechts een der wanden, hetzij voor- of achterwand doorboord is. Men verklaart die doorboring of verdunning door een resorptieproces aan te nemen, waarvan bij de mossen, onder anderen, merkwaardige voorbeelden in de vorming van het *peristomium internum* bestaan.

Het voorkomen der poren is verschillend, hetzij in grootte of in getal, hetzij in plaatsing aan den cellenwand, bij onderscheidene soorten van *Sphagnum*. In de cellen van *Sph. tenue*, Pl. I, *Fig.* 7, ziet men ze klein en in groot aantal, regelmatig aan de cellenwanden tusschen iedere spiraalwinding. Daarentegen in de takbladen van *Sph. Gedeanum*, Pl. I, *Fig.* 1, zijn zij de helft grooter, wel aan beide zijden van de cellenwanden, maar onregelmatig geplaatst. In de stengbladen dezer soort, Pl. I, *Fig.* 2, ziet men slechts een of twee poren, terwijl de diameter van eenen poor aan dien van de cel gelijk is. Zij schijnen geheel en al in de stengbladen van *Sph. acutifolium*, Pl. I, *Fig.* 4 en 5, te ontbreken. Merkwaardig is hunne plaats aan den top der cellen van *Sph. sericeum* en *Sph. Hollianum*, Pl. II, *Fig.* 8, 10, 12, 13. De cellen zijn daar echter niet geheel doorboord; de lichtere tint, die zij op die punten door kleuring verkrijgen, toont slechts eene verdunning van den cellenwand aan. Wanneer men ze vochtig en ongekleurd door het mikroskoop beziet, schijnen die poren blinkende verhevenheden; doch ook de bladen hebben, over het geheel, eene glinsterende oppervlakte. De poren van *Sph. Hollianum* zijn eenigzins kleiner, dan die van *Sph. sericeum*.

In het algemeen schijnen de poreuse cellen vooral bestemd te zijn, om de capillariteit der plant te verhoogen, en het water sneller te doen opzuigen. Met uitzondering der *Leucophaneën* bestaat er geen mos, dat het water tot zulk eene aanmerkelijke hoogte kan opzuigen, als het veenmos. Die planten zijn ware sponsen, die met verwonderlijke snelheid het water opslurpen, door welke eigenschap zij de uitdrooging der moerassen en vochtige plaatsen, die zij uitsluitend bewonen, bevorderen.

Het andere cellenstelsel, dat onmiddelijk tot voeding der plant dient, bestaat, zoo als gezegd is, bij alle Europesche soorten uit naauwe enkelvoudige cellen, die steeds met fijn korrelig groen cellenstof zijn gevuld. Deze cellen zijn echter bij deze soorten moeijelijk te zien, en alleen bij de sterkste vergrooting, onder het mikrooskoop, duidelijk waar te nemen. Het is daaraan waarschijnlijk toe te schrijven, dat Meijen, in zijne genoemde verhandeling, het bestaan van zoodanig verschillend cellenstelsel bij de *Sphagna* ontkende. Alle twijfel daaromtrent wordt nu echter geheel opgelost door de ontdekking van de Indische soorten *Sph. sericeum* en *Sph. Hollianum*. Men ziet bij hen dit cellenstelsel niet meer enkelvoudig, zoo als in alle andere soorten, maar zamengesteld en vatbaar voor meerdere ontwikkeling. Door kleuring met jodiumtinktuur en zwavelzuur verkrijgt men daarvan een duidelijk beeld, *Pl.* II.

De vermenigvuldiging van deze cellen behoeft geene andere verklaring, dan die in het algemeen voor het ontstaan der cellen wordt aangenomen, namelijk door cellenkernen. Ik heb die kernen in dit cellenstelsel afgebeeld in Pl. II, *Fig.* 8. Het is dus niet noodig, om, zoo als Müller meent, *Bot. Zeit.* 1847, *p.* 483, ter verklaring van deze vermenigvuldiging, zijne toevlugt te nemen tot den *utriculus primarius*. De sterke ontwikkeling van dit cellenstelsel veroorzaakt bij *Sph. sericeum* eene opmerkelijke verdikking der cellenwanden, vooral aan den top der bladen. Die verdikking is zoo sterk, dat het celweefsel onduidelijk wordt, en dat de aldaar zeer kleine, poreuse cellen slechts door een blinkend homogeen vlies schijnen gescheiden te zijn. Zoo als Müller te regt aanmerkt, kan men het celweefsel van den bladtop het best met dat der *Pterygophylleën* vergelijken. De bladen van *Sph. sericeum* verkrijgen door de buitengewone ontwikkeling van dit celweefsel en door de verdikking der cellenwanden eene grootere stevigheid, dan de andere *Sphagna*-soorten bezitten. De bladpunt is bij de genoemde soort even als bij *Sph. Hollianum* gaaf en scherp, terwijl die der overige *Sphagna* door de afwijking der cellen van elkander dikwijls zeer sterk getand is. *Sph. Hollianum* verschilt van de vorige soort door een regelmatig ontwikkeld groen celweefsel. De voedingscellen, die de poreuse cellen zeer fraai ruitvormig omringen, zijn meestal slechts verdubbeld, en tot bijna aan den uitersten bladtop gelijkvormig, Pl. II, *Fig.* 13. De bladen zijn daarom, uitgezonderd de punt, niet zoo stevig als die van de andere soort. Bij *Sph. Gedeanum* en *Sph. Junghuhnianum* is het groen cellenstelsel aan dat der Europesche gelijkvormig.

Het heeft mij tot nog toe aan tijd en gelegenheid ontbroken, om het celweefsel van de overige bekende soorten van *Sphagnum* op gelijke wijze te onderzoeken. Ik twijfel echter niet, of zulk een onderzoek zal aanleiding geven tot eene juistere soortsbepaling van deze plantengroep. Maar bovendien is het mij voorgekomen, dat hare soorten noodwendig herziening behoeven. Het schijnt zelfs, dat men bij de soortsbeschrijving van deze oogschijnlijk gelijkvormige planten, niet genoeg gelet heeft op verschilspunten, tot welker opmerking de hulp van het mikroskoop niet vereischt wordt. Zoo is b. v. het getal takken in de takbundels van eene bepaalde soort zeer verschillend opgegeven. De schrijvers der *Bryologia Germanica*, in welk werk het omstandigst over deze plantengroep wordt verhandeld, geven het getal takken bij *Sph. cymbifolium* en *squamosum* aan, als 3—5; bij *Sph. acutifolium*, als 5—7. Door Dr. K. Müller in zijne *Synopsis muscorum* en in zijne *An-*

6

leitung zur Kenntniss der Laubmoose Deutschlands enz. Halle 1853, is dit getal nog wijder begrensd; als bij *Sph. cymbifolium*, 1—4; bij *Sph. cuspidatum* als 1—5, enz. Ik heb dit getal integendeel, bij iedere soort, vrij standvastig bepaald gevonden, en kan mij het verschil, dat men daarin heeft gevonden, slechts verklaren, hetzij door verwisseling van soorten; of wel, dat men voor dat onderzoek jongere onvruchtbare exemplaren heeft gebruikt. Men moet daartoe echter enkel de vruchtdragende, typische exemplaren bezigen; want uit deze behoort de soortsbeschrijving ontleend te worden. Zoo is ook *Sph. sericeum* in de *Synopsis muscorum* verkeerdelijk met twee takken in iederen bundel beschreven, terwijl het er inderdaad vier heeft, als twee boogvormig gekromde, en twee bijna regt, langs de steng afhangende takjes. Ook in de rigting der takken en bladen is er een in het oog loopend verschil bij onderscheidene soorten, hetwelk men het best gewaar wordt, wanneer men die planten bij verschillenden graad van vochtigheid of droogte onderling vergelijkt. Bij zoodanige vergelijking werd ik het eerst oplettend op *Sph. flexuosum*, in den *prodromus Florae Batavae* beschreven en afgebeeld, en welke plant zich voornamelijk door eene bijzondere golving van takken en bladen, vooral bij het droog worden, van andere verwante soorten onderscheidt.

VERKLARING DER AFBEELDINGEN.

Pl. I. *fig.* I. Celweefsel van een takblad van *Sph. Gedeanum,* 150 maal vergroot.

fig. II. Celweefsel van een stengblad van *Sph. Gedeanum,* 300 maal vergroot.

fig. III. Onderste gedeelte van een stengblad van *Sph. Junghuhnianum,* 300 maal vergroot.

fig. IV. bovenste gedeelte van een stengblad van *Sph. acutifolium,* 300 maal vergroot.

fig. V. basis gedeelte van een stengblad van *Sph. acutif.,* 300 maal vergroot.

fig. VI. bovenste gedeelte van een stengblad van *Sph. tenue,* 300 maal vergroot.

fig. VII. gedeelte van een takblad van *Sph. tenue,* 300 maal vergroot.

Pl. II. *fig.* VIII. gedeelte uit het midden van een topblad van *Sph. sericeum,* 300 maal vergroot.

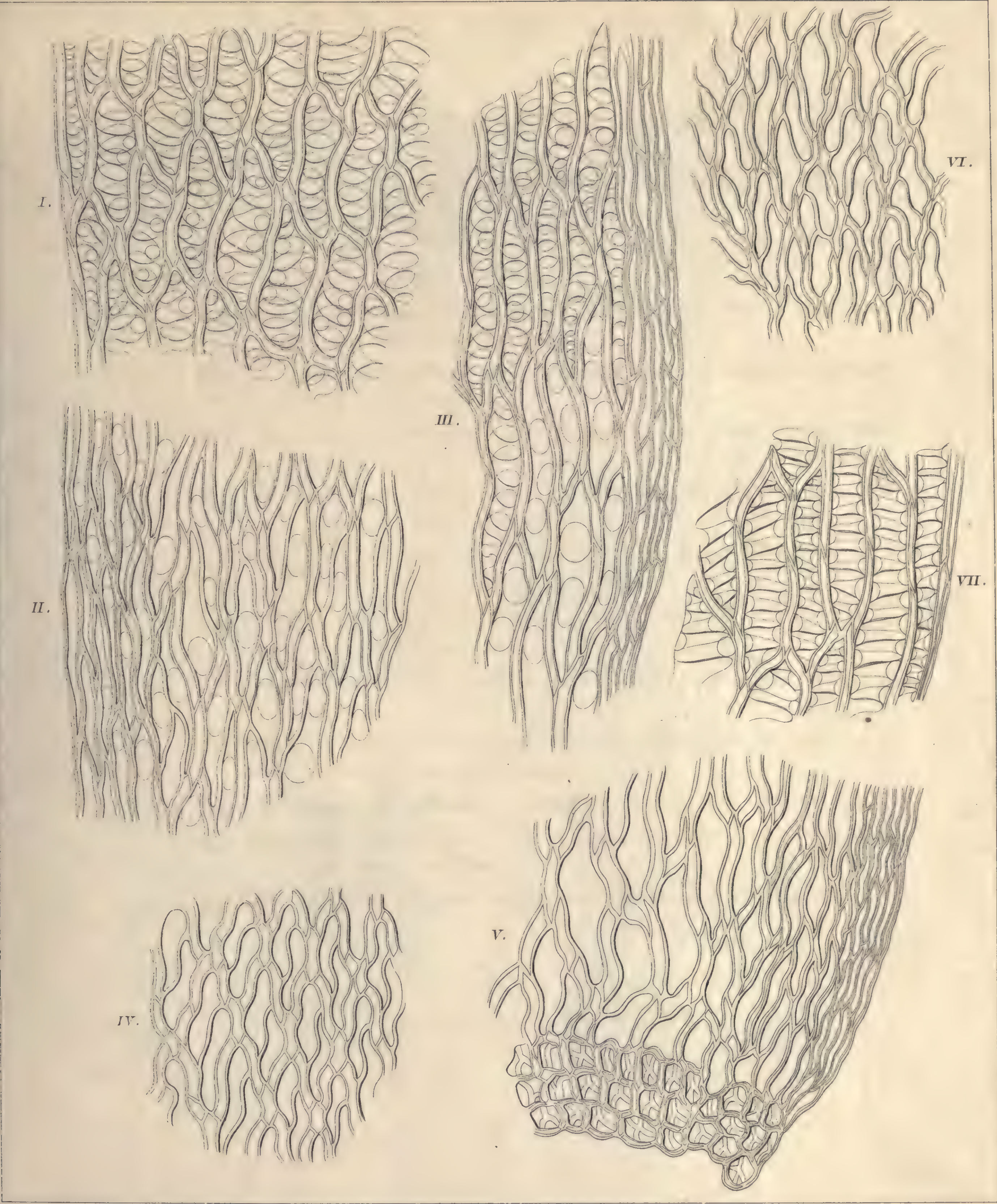
fig. IX. een stuk van hetzelfde blad, digt bij de punt, 300 maal vergroot.

fig. X. gedeelte van de basis van een stengblad van *Sph. sericeum,* 300 maal vergroot.

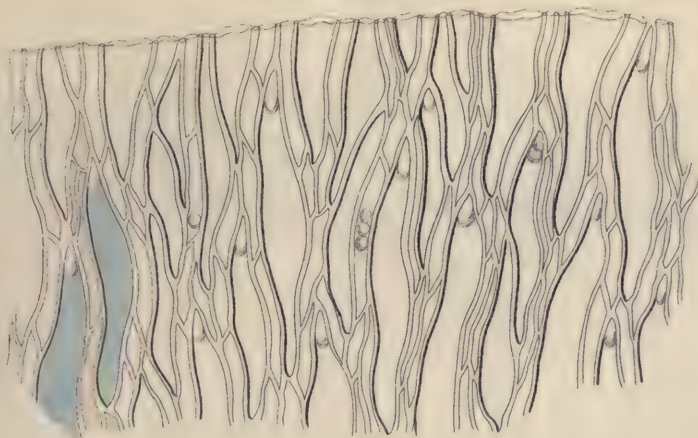
fig. XI. middelste gedeelte van dit stengblad, 300 maal vergroot.

fig. XII. middelste gedeelte van een stengblad van *Sph. Hollianum,* 300 maal vergroot.

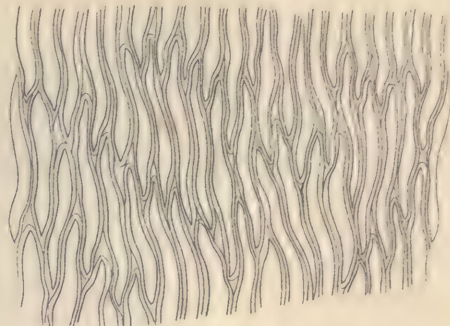
fig. XIII. gedeelte van een topblad van die soort, 300 maal vergroot.


I.
II.
III.
IV.
V.
VI.
VII.

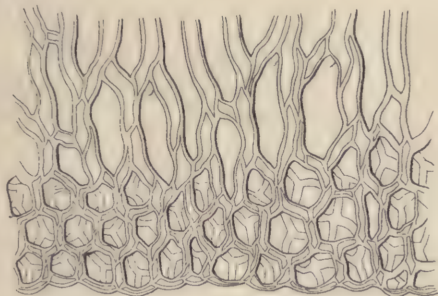
VIII.



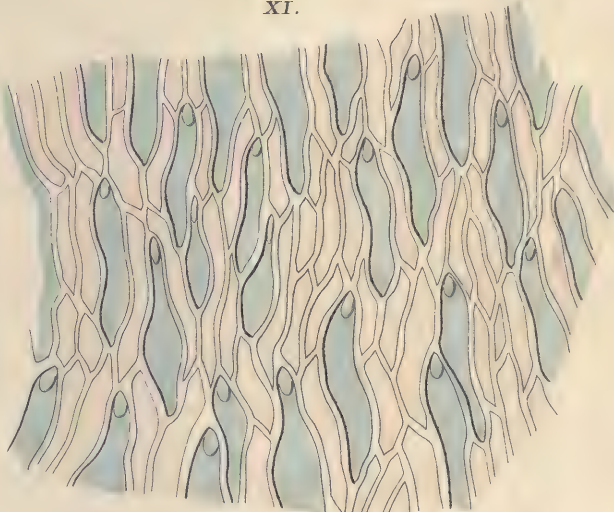
IX.



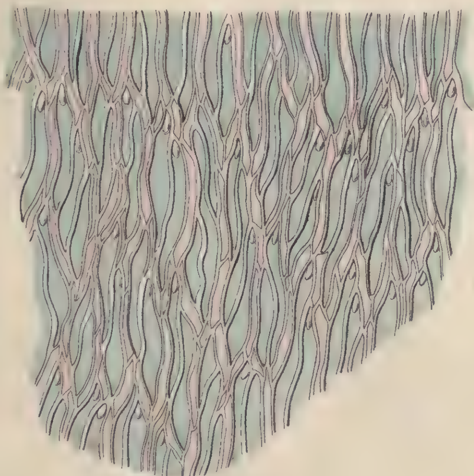
X.



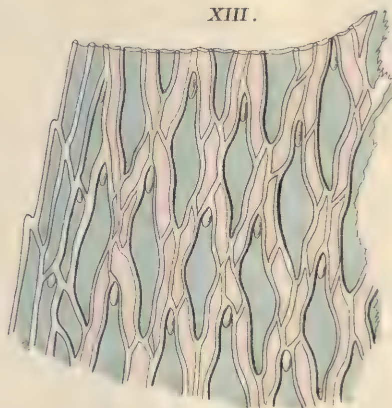
XI.



XII.



XIII.



ANATOMISCH PHYSIOLOGISCH ONDERZOEK

OVER HET

FIJNERE ZAMENSTEL

EN DE

WERKING VAN HET RUGGEMERG.

DOOR

J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen,

MET DRIE PLATEN.



AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1854.

ANATOMISCH PHYSIOLOGISCH ONDERZOEK

OVER HET

FIJNERE ZAMENSTEL

EN DE

WERKING VAN HET RUGGEMERG.

DOOR

J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK.

Onder de moeijelijkste vraagstukken uit het gebied van de fijnere ontleedkunde behoort ongetwijfeld het onderzoek aangaande het fijnere maaksel en zamenstel van hersenen en ruggemerg; de bijzondere weekheid van deze deelen, die door een geringen druk vernietigd worden, de buitengewone fijnheid en teederheid van het weefsel, waardoor de eigenlijk zamenstellende primitiefdraden zich geheel aan het bloote oog onttrekken, en men niet dan met moeite in staat is, onder vrij sterke vergrootingen, een enkelen draad slechts voor een zeer klein gedeelte te vervolgen, het onnoemelijk aantal eindelijk van deze primitiefdraden, die op vele plaatsen op de verschillendste wijze dooreen zijn geweven en een niet te ontwarren net vormen, zijn zoovele oorzaken, dat de sedert lang met de meeste volharding in het werk gestelde pogingen van de voornaamste ontleedkundigen tot zeer verschillende uitkomsten hebben geleid, en dat omtrent de gewigtigste vraagpunten nog een groot verschil van gevoelen heerscht.

Hierbij komt nog het verschil tusschen de witte- of mergstof en de grijze stof, in welke laatste op vele plaatsen verschillende gangliëncellen zijn bevat,

7

waarvan eenige een hoogst fijn net van vertakte draden vormen, hetwelk dikwijls zeer moeijelijk van het hiertusschen inloopend fijn net van bloedvaten te onderscheiden is, en waarvan het verband met de mergstof of witte zenuw- of hersendraden nog op verre na niet overal is beslist en met overtuigende duidelijkheid aangewezen.

Vooral heeft het zamenstel van het ruggemerg, van welks oplossing de verklaring van eene menigte gewigtige physiologische vragen afhankelijk is, in de laatste jaren de aandacht der voornaamste ontleedkundigen bezig gehouden.

Vroeger scheen de vraag, of de zenuwdraden uit de wortels der zenuwen onmiddelijk door het ruggemerg tot in de hersenen verliepen, naauwelijks aan eenigen twijfel onderhevig te kunnen zijn; daar niet alleen het gevoel zich door het ruggemerg aan de hersenen mededeelt, maar ook van hier met eene onbegrijpelijke snelheid de bevelen van onzen wil naar de verschillende spieren worden overgebragt.

Nadat verder door Ehrenberg het maaksel van hersenen en ruggemerg als uit fijne buisjes bestaande was aangetoond *, scheen het onmiddelijk verband der zenuwen door het ruggemerg met de hersenen door Valentin buiten allen twijfel te zijn aangetoond †. Remack echter, die zich later bijzonder met het mikroskopisch onderzoek der grijze stof bezig hield en de gangliëncellen met hunne uitloopende draden nader onderzocht §, was een der eersten, die omtrent het gevoelen van den eenvoudigen oorsprong der zenuwen door het ruggemerg uit de hersenen eenigen twijfel schijnt gekoesterd te hebben, hoezeer hij zich onthoudt om eenig bepaald gevoelen aan te geven; hij zegt namelijk: *De ratione, quae inter radices nervorum spinalium et substantias medullae spinalis intercedit, nihil ad huc constat, neque ipse quamque huic rei investigandae plurimum operae dederim, aliquid certe ad huc proferre possum. Id solum persuasum habeo, fibras radicum nervorum, non tam simplicem originem* habere, ut in fibras longitudinales medullae spinalis mox transeant* **.

* C. G. Ehrenberg, *Beobachtung einer ungekannten Structur des Seelenorgans.* Berl. 1836. — Zie ook Poggendorf's *Annal.* 1833.

† *Nova Acta Leopold.* 1826, Tom. XVIII, pag. 131.

§ *Observationes anat. et microsc de syst. nerv. structura.* Berl. 1838.

** l. c. pag. 19 sq.

Eene gewigtige bijdraag leverde daarna A. HANNOVER tot een naauwkeuriger onderzoek van de fijne structuur van hersenen en ruggemerg, door het gebruik van het chromzuur, hetgeen het eerst door hem werd aangeraden, waarmede hij door JACOBSON uit Koppenhagen was bekend geworden *; hij wendde dit aan: 1 deel zuur op 16 à 20 deelen water, en liet hierin de gedeelten van het ruggemerg 2 tot 4 maanden leggen, voor hij die gebruikte; hij vond door dit middel de dwarsvezelen in het ruggemerg (commissuren) bij vogels, kikvorschen en visschen, en meende zich overtuigd te hebben, dat de hersenvezelen van gangliëncellen hunnen oorsprong namen †.

Later, in zijn speciaal werk over dit onderwerp, zegt hij, dat door eene vergissing hij vroeger de sterkte van de oplossing van het zuur te geconcentreerd nog had opgegeven, dat het vocht de kleur van licht geel moest hebben §. Hij wijst hierin bepaald den oorsprong der herzenvezelen aan van de gangliëncellen in de corticale stof en geeft hiervan goede afbeeldingen **; van de ruggemergvezelen zegt hij, dat zij perpendiculair naar beneden dalen, zich onder een stompen hoek ombuigen en zoo in de wortels der zenuwen overgaan, zoodat de herzenvezel en zenuwvezel onmiddelijk met elkander zamenhangen ††; hij beschrijft op nieuw de dwarsche vezelen, die hij in de zoogdieren niet duidelijk had gezien, wel in vogelen, amphibiën en visschen, maar die hij niet tot aan den omtrek van het merg had kunnen vervolgen; somwijlen schenen eenige weinige zich in de zenuwwortels om te buigen §§, een gedeelte dezer vezels gaat wel van de eene tot de andere zijde van het ruggemerg, maar geene overkruising heeft plaats. Hij herinnert zich niet duidelijk hersenvezels in het ruggemerg uit de gangliëncellen te hebben zien ontstaan, slechts enkele malen echter in visschen ***.

Geheel verschillend waren de uitkomsten van STILLING en WALLACH, die

---

* A. HANNOVER, *Die Chromsaure, ein vorzuchliches Mittel bei Mikroskopische Untersuchungen in* MULLER'S *Arch.* 1840. pag. 548.

† l. c. pag. 555.

§ A. HANNOVER, *Recherches microscopiques sur le système nerveux.* Copenhague 1844.

** l. c. pag. 11, *Fig.* 1, 2, 11, 17, 22, 23.

†† l. c. pag. 12.

§§ l. c. pag. 13.

*** l. c. pag. 16 en 19.

ten gevolge van hun onderzoek over het ruggemerg meenden te moeten vaststellen, dat de wortels der zenuwen dwars tusschen de witte strengen van het ruggemerg en de grijze stof verliepen, en niets anders waren dan directe verlengsels van de dwars loopende vezels der grijze substantie van het ruggemerg, zoo dat de voorste wortels zich met de achterste van de overzijde van het ruggemerg in het midden kruisten *. De wil zoude vooral door de grijze stof werken †. In deze eerste verhandeling verwisselden zij nog de gangliëncellen met verwijde bloedvaten; veel volkomener en teregt over het algemeen als zeer getrouw erkend, zijn de latere onderzoekingen van STILLING §, waarin hij de multipolaire gangliëncellen wel beschrijft, maar het verband tusschen deze zenuw-wortels en de spinaal-ligchaampjes, gelijk hij die noemt, of gangliëncellen bleef hem onbekend **, ofschoon hij vermoedt, dat zij nader met de bewegende kracht in verband staan ††. Hoezeer de oorsprong der zenuw-wortels uit de grijze stof, voor zooverre die door geringe vergrootingen zigtbaar is, door STILLING in zijne beide laatste hoogst verdienstelijke werken met de meeste naauwkeurigheid is afgebeeld, waren echter wegens te kleine vergrootingen deze onderzoekingen niet in staat, het fijnere verband tusschen de zenuw-wortels en de andere vezelen van het verlengd ruggemerg aan te toonen; terwijl duidelijk op het denkbeeld van een plaatselijken dwarschen oorsprong en overkruising der ruggemerg-zenuwen veel invloed hebben gehad, zijne, in een vroeger geschrift uiteengezette proeven, over gedeeltelijke dwarsche doorsnijdingen van het ruggemerg, waardoor zekerlijk reflexbeweging niet verhinderd wordt, maar ook volgens STILLING zelfs willekeurige beweging zoude blijven bestaan onder het doorgesneden gedeelte §§. Deze proeven werden in navolging van vroegere, door onzen VAN DEEN *** verrigt, in het werk gesteld, en meestal daarmede in tegen-

---

* *Ueber die Textur des Ruckenmarks.* 1842. pag. 27 sq.

† l. c. pag. 38.

§ *Ueber die Textur der Medulla oblong.* Erl. 1843.

** l. c. pag. 47.

†† l. c. pag. 5.

§§ *Ueber das Ruckenmark,* pag 35; — vooral ook in zijn geschrift: *Untersuchungen ueber die Functionen des Ruckenmarks.* Leipz. 1842. pag. 139 en 152. *Fig.* 15 en 20.

*** VAN DEEN, *Nadere ontdekkingen over de eigenschappen van het Ruggemerg.* Leiden 1839. pag. 27 en 61.

spraak; zij kunnen ook in een zoo zamengesteld orgaan moeijelijk over het fijnste beloop der vezelen zekerheid verspreiden.

Eenen geheel anderen weg sloeg VOLKMANN in, om te betoogen, dat de zenuwen uit het ruggemerg niet onmiddelijk tot de hersenen konden doorloopen; was dit namelijk het geval, dan moesten in het bovenste gedeelte van het ruggemerg alle draden aanwezig zijn, die als zenuwen zich lager door het ligchaam verspreiden; dit moest dus meer naar eenen kegel gelijken, dat is, de mergstof of witte strengen moesten aan het halsgedeelte zoo veel dikker worden, als noodig was om alle zenuwdraden te kunnen bevatten *; dit scheen echter bij eene meeting van de dikte der zenuwen, in verband met de witte stof van het ruggemerg geenszins het geval te zijn. Deze uitkomst werd vooral bevestigd door zijne onderzoekingen omtrent het ruggemerg van eenen slang (Crotalus mutus), waar hij niet minder dan 221 zenuwparen telde, wier gezamenlijke dikte den omvang van het ruggemerg bij de tweede halszenuw meer dan elf malen overtrof †. De zenuw-wortels ontspringen dus, volgens hem, in het ruggemerg en loopen niet direct door naar de hersenen.

Met veel scherpzinnigheid betoogt hij verder, dat de bewegingsdraden bij hunnen oorsprong in het ruggemerg zoo geschikt zijn, dat iedere prikkel, die hen treft, een doelmatig geheel van bewegingen (gecoördineerde bewegingen) moest voortbrengen. Daar, zegt hij, één prikkel aan het zwemvlies van den kikvorsch toereikend is, alle bij elkander behoorende motorische vezels in beweging te brengen, is er geen twijfel aan, dat eene enkele herzenvezel, die tot aan het insertiepunt der te zamen behoorende motorische schenkelzenuwen dringt, niet hetzelfde zoude kunnen teweeg brengen. Nog veel minder reden is er, voegt hij er bij, om te betwijfelen, dat eene enkele hersenvezel voldoende zij, al die motorische vezels in werkzaamheid te brengen, die zonder uitzondering gelijktijdig werken, zoo als b.v. de zenuwen van eene en dezelfde spier, en die dus naar alle waarschijnlijkheid zoo ingerigt zijn, dat partieele toestanden en werkingen hierbij onmogelijk zijn §.

Later zullen wij zien, hoezeer in deze gezegden reeds de grond der ware verklaring van den loop en de verhouding der zenuwwortelen en het ruggemerg gelegen is. Was VOLKMANN toen nader bekend geweest met de ver-

---

* VOLKMANN, *Nerven-Physiologie* in WAGNER, *Physiol. Wort.* 2 B., pag. 482.

† l. c. pag. 485.

§ l. c. pag. 555.

houding der gangliëncellen en hunne uitloopende draden en verbinding met de zenuwwortels en overige vezelen van het ruggemerg, dan zoude hij gewis weinig aan zijne navolgers ter verbetering hebben overgelaten, en het is inderdaad te verwonderen, dat men op deze gewigtige uitspraken en bewijzen van VOLKMANN later te weinig gelet heeft. Hem schoot intusschen ter verklaring van deze en andere verschijnselen geen andere weg over, dan om eene dwarsleiding aan te nemen in het ruggemerg *. Eene voorstelling echter, die bij eenig dieper nadenken wel moest blijken van de zoo groote regelmatigheid en standvastigheid der bewegingen, hetzij willekeurige, hetzij van de natuurlijke verschijnselen van reflex, slikking en andere soortgelijke bewegingen geene voldoende rekenschap te kunnen geven.

Nog eene schrede verder ging R. WAGNER, die de multipolaire gangliëncellen en hunne uitgaande draden of vezels in den electrischen rog nader onderzocht, en hoezeer hij tusschen de draden dier cellen en de zenuwen, wegens de groote overeenkomst, wel een direct verband vermoedde, gelukte het hem echter geenszins een directen overgang of zamenhang tusschen deze draden en de zenuwen waar te nemen †. Hij gaf echter volgens deze denkbeelden schematische voorstellingen van het verband tusschen de gevoel- of liever reflex- en beweegzenuwen, door middel van deze multipolaire gangliëncellen, waardoor hij op eene ongedwongen wijze de voornaamste verschijnselen verklaren kon §.

Andere schrijvers weken echter weder van dit gevoelen af, en zochten de oude leer van den hersen-oorsprong aller zenuwen te verdedigen. Merkwaardig zijn in dit opzigt de onderzoekingen van BUDGE, aangaande de achterste of gevoelswortels bij den kikvorsch. Hij vond namelijk, dat deze zich in twee strengen verdeelen, waarvan de eene zich terstond naar boven rigtte **, terwijl de andere streng in de diepte doordrong tot in de grijze stof en hier tusschen vele gangliënkogels lag, maar waarvan het hem niet gelukte de draden verder naar boven naar de hersenen te vervolgen ††. Desniettegenstaande besluit hij, dat ook deze noodwendig naar de hersenen zich moeten

* l. c pag. 528 sqq.

† WAGNER, *Physiol. Worterb.* III B. 1 Abth. pag. 378. Tab. 111, *Fig.* 42—45.

§ l. c. pag. 398, 400.

** MULLER'S *Archiv.* 1844. pag. 177. Tab. VIII, *Fig.* 6. *s, g. Fig.* 7, *a.*

†† l. c. pag. 180 sq. *Fig.* 6. *t. Fig.* 7, *b.*

begeven, en vermoedt dus, dat hij deze vezelen zal vernield hebben, hoezeer hij uitdrukkelijk zegt, dat hij in geen enkel geval in staat was deze diepere vezelen te vervolgen *. Een merkwaardig bewijs, hoezeer een eens opgevat denkbeeld hinderlijk kan zijn in de erkenning der waarheid. Om deze redenen houden wij deze waarneming van Budge, waar hij, niettegenstaande zijne hiermede in strijd zijnde meening toch getrouw verhaalt, wat hij gezien heeft, van groot gewigt. Ofschoon het niet schijnt, dat Todd en Bowman zelve mikroskopische onderzoekingen hebben in het werk gesteld, besluiten zij echter uit physiologische gronden, dat de zenuwen eindigen in de grijze stof van het ruggemerg, hetgeen als met segmenten onderling vereenigd is, en waarvan de voorste witte strengen, volgens hen, dienen voor beweging en gevoel, de achterste voor de coördinatie der beweging. *Physiol. Anat.* P. II, p. 321 sqq. *Cyclop. of Anat. and Phys.* p. 721 sqq.

Nadat het mij gelukt was in het jaar 1847 een naauw verband tusschen de peripherische verspreiding der gevoel- en beweegzenuwen te vinden, door het ontdekken van de in meerdere opzigten merkwaardige wet van den loop en de verspreiding der gevoelzenuwen in de huid, namelijk, dat overal in het ligchaam de gevoeltakken eener gemengde zenuw naar dat gedeelte der huid verloopen, hetwelk door die spieren bewogen wordt, die van dezelfde zenuwstam bewegingsdraden ontvangen, zoodat, de werking der spieren bekend zijnde, men volgens deze wet reeds à priori de verspreiding der gevoelzenuwen in de huid bepalen kan †, werd ik ook door meerdere verschijn-

* l. c. pag. 181.

† Zie *Tijdschrift der Wis- en Natuurk. Wetensch. van de Eerste Klasse van het Kon. Ned. Inst.* 1847. pag. 44 sqq. Over het verband tusschen de gevoels- en bewegings-zenuwen. Ofschoon ook deze verhandeling in Oct. 1848 in Froriep, *Notizen*, is opgenomen, schijnt zij weinig de algemeene aandacht tot zich getrokken te hebben; daar, zoo verre mij bekend is, in geene latere werken van deze wet van verspreiding melding wordt gemaakt; ofschoon het eene algemeene wet schijnt te zijn, die niet alleen bij den mensch maar ook bij de dieren van toepassing is, en dus niet kan gezegd worden van gewigt ontbloot te zijn *; waarom ik het niet ongepast acht, kortelijk

* Zoo wordt in de Verhandeling van Dr. J. Peyen, *Ueber die pheripherischen Endigungen der motorischen und sensiblen Fasern der in den Plexus brachialis des Kaninchens eintretenden Nerven-wurzeln* in Henle en Pfeuffer *Zeitschr. f. rat. Med.* 1853. IV B. 1 th. pag. 52 sqq. met geen enkel woord van deze wet gewag gemaakt en de onderzoekingen van den schrijver hebben hem zelfs niet op het spoor van deze wet gebragt. — Hij heeft echter alleen gelet op de betrekking der zenuwwortels tot de peripherische verbreiding, en komt tot het resultaat, dat in het algemeen dezelfde zenuwwortel die plaatsen der huid met gevoeldraden voorziet, onder welke de van haar *innervirte* spieren liggen. Dit wijkt in den eersten opslag af van onze wet, maar deze geldt van de afzonderlijke zenuwen, waar zij in de spieren treden, terwijl hij op bijzondere spieren minder gelet heeft, waardoor hij tot minder bepaalde uitkomsten geraakt is.

selen van zelve geleid tot het vermoeden, dat er een naauwer centraal verband bestond tusschen de gevoel- en beweegzenuwen van denzelfden stam; om deze redenen nam ik mij voor te beproeven of ik misschien door een

---

hier nog deze wet met een enkel woord toe te lichten. Ik heb deze wet uitgedrukt met de volgende woorden: *dat, terwijl de zenuw bewegingstakken afgeeft naar de spieren, hare gevoeltakken loopen naar dat deel (der huid), hetwelk door diezelfde spieren bewogen wordt*, of met andere woorden: *eene ruggemergzenuw geeft hare beweegtakken naar de spieren als werktuigen van beweging, en hare gevoeltakken naar het bewogen deel.*

Eenige weinige voorbeelden mogen deze wet ophelderen: de nervus perforans Casserii aan den arm geeft bewegingstakken aan den biceps en brachialis internus, die den voorarm buigen; zijne gevoelstakken verspreiden zich naar den voorarm zelven, vooral aan de radiaalzijde, die door deze spieren het sterkst wordt opgeheven; de nervus medianus geeft zijne eerste takken aan de buigers der vingeren, zijne gevoelstakken aan de binnenzijde der vingeren, welke door deze spieren worden bewogen; hetzelfde doet aan de ellepijpszijde de nervus ulnaris, en deze geeft bovendien nog op de rugzijde bewegingstakken aan den ulnaris externus en cutanei externi en ook aan het hierdoor bewogen gedeelte der buitenzijde van de hand en vingeren de gevoelstakken. — De spaakbeenszenuw geeft takken aan den triceps brachii en zendt van hier hare gevoeltakken aan de rugzijde van den voorarm, die door deze spieren wordt uitgestrekt; het vervolg der zenuw geeft takken aan de extensores digitorum en gevoeltakken van den rug der vingeren, die hierdoor bewogen worden. De bovenste lendenzenuwen geven takken aan den psoas en iliacus internus, en verder gevoeltakken aan de voorzijde der dij, welke door den psoas en iliacus internus wordt gebogen. Hetzelfde is toepasselijk op de cruralis en ischiadicus met al zijne takken. Bijzonder merkwaardig spreekt deze wet in de derde en vierde halszenuwen; deze geven takken aan den sternocleidomastoideus en andere halsspieren, die het hoofd ter zijde bewegen, en tevens takken, die zich omslaan en weder naar boven loopende, zich begeven naar die zijde van het hoofd, die door deze spieren bewogen wordt; doch zij geven ook spiertakken aan den levator scapulae en tevens nederdalende gevoeltakken, die over den schouder en het sleutelbeen loopen, welke door den sterno-cleidomastoideus en levator scapulae worden opgetrokken. Ook bij dieren vindt deze wet hare gestrenge toepassing. De grond der wet is, dat wij de werking der spieren zelve niet gevoelen, noch haren graad van zamentrekking, dan waren wij geboren anatomen; de spieren zelve ontvangen geene ware gevoelzenuwen, maar wij verkrijgen kennis van hare werking, door de verandering, die zij bij beweging in de gevoelige huid veroorzaken; van hier, dat wij bij verlies van gevoel ook de maat missen van beweging, en die niet meer met juistheid kunnen besturen. Aan de andere zijde bleek het mij, dat eene niet te sterke prikkeling, eene kitteling of wrijving, eene reflexbeweging voortbrengt in de spieren, die uit denzelfden zenuwstam bewegingstakken ontvangen; ik nam dit waar bij verlamden, en het is gemakkelijk te zien bij zeer jonge kinderen, waar kitteling in de hand buiging der vingeren, aan de rugzijde uitstrekking teweegbrengt, zoodat deze wet ook van toepassing is op het aanwenden van inwrijvingen van vlugtige linimenten, om de werking van spieren op te wekken. Zoo zag ik bij eenen verlamde door het wrijven van linimentum volatile op den rug der hand, sterk gecontraheerde vingeren en even zoo de onwillekeurig gebogen arm door inwrijven op de rugzijde van den voorarm zich van zelve uitstrekken. Galvanisme echter volgt niet bepaald den loop der zenuwen, maar wekt meerdere verschillende spieren op, die in den loop des strooms gelegen zijn.

naauwkeuriger onderzoek van het zamenstel van het ruggemerg dit verband zoude kunnen opsporen.

Ofschoon de uitkomst in dit zoo moeijelijk gedeelte niet geheel en al beantwoordde aan hetgeen ik verlangde te weten, voerden mijne onderzoekingen toch tot eene verklaring, waardoor het mij toescheen, de meeste vragen over het zamenstel en de werking van het ruggemerg ongedwongen te kunnen beantwoorden, waartoe iedere bijdrage op dit zoo onzekere veld, waar eene zoo groote menigte van vivisectien meer verwarring en tegenspraak, dan stellige waarheden hadden aangebragt, niet van gewigt ontbloot is.

Ik deelde de uitkomsten van mijn onderzoek het eerst voorloopig mede in de aanteekeningen van het verhandelde in de sectie voor Natuur- en Geneeskunde van het Prov. Utrechtsche Genootschap, den 26sten Junij 1848 *, hetgeen ik later uitvoeriger en door verschillende praeparaten toegelicht in den herfst van dat jaar in het Kon. Ned. Instituut voordroeg.

Door namelijk het ruggemerg, op de wijze zoo als door STILLING was aangegeven, in spiritus te verharden, gelukte het mij meerdere zoo wel dwarse als overlangsche dunne sneedjes te vervaardigen, waarin zich, nadat ik die tot eene genoegzame doorschijnendheid had gebragt, niet alleen eene menigte multipolaire gangliëncellen vertoonden, maar ook een net van vertakte draden, waardoor deze cellen onderling te zamen hingen en een zeer zamengesteld net vormden, vooral in de voorste horens der grijze stof; doch ook in de achterste horens trof ik hoewel meest kleinere gangliëncellen aan, die eveneens mij voorkwamen door meerdere of mindere draden onderling vereenigd te zijn; deze cellenhoopen in de grijze stof schenen mij toe verschillende meer of minder zamenhangende groepen te vormen, waaruit het mij in enkele sneedjes gelukte, de voorste zenuwwortels te zien ontspringen; zoodat ik meende te mogen besluiten, zoo als VOLKMANN en WAGNER reeds hadden vermoed, dat de voorste zenuwwortels zich niet naar boven langs het ruggemerg tot de hersenen verlengen, maar alle uit groepen van multipolaire gangliëncellen ontspringen. Ook de achterste wortels kon ik in enkele gevallen tot aan gangliëncellen vervolgen der achterste horens, die naar mijne meening met de groep gangliëncellen en de voorste horens te zamen hangen, terwijl een ander gedeelte der achterste wortels mij toescheen, zonder in de

* Zie ook deze waarnemingen vertaald in het Zweedsch door J. F. LIEDHOLM, in het Tijdschrift *Hygiea Medecinsk och Pherm. Monadsskrift.* II B. 1849. Sept. pag. 553 sqq.

grijze stof te dringen, zich longitudinaal naar boven te begeven *. Deze laatste waarnemingen omtrent de achterste wortels durfde ik echter niet als volkomen zeker voorstellen, wegens de groote moeijelijkheid om deze verbindingsdraden genoegzaam te kunnen vervolgen en te onderscheiden. De gangliëncellen en de achterste gedeelten vond ik in het algemeen kleiner, langwerpiger en een minder getal takken afgevende dan de voorste grootere; ook schenen mij de achterste in het algemeen minder pigmentkorrels te bezitten. Somwijlen trof ik ook kleine driehoekige gangliëncellen aan tusschen de verdeeling der draden, die zich echter door eene ingesloten kern als zoodanige verrieden. De draden der grootere gangliëncellen zijn dikwijls dikker dan de primitive mergdraden in het ruggemerg aanwezig. Deze structuur vond ik het duidelijkst in het onderste gedeelte van het ruggemerg, waar het merg of de witachtige vezels nog in geringer aantal aanwezig zijn; dezelfde structuur en zamenhang vertoonen zich evenwel door het geheele ruggemerg.

Op deze wijze meende ik te mogen besluiten, dat de beweegzenuwen uit groepen van onderling te zamen hangende multipolaire gangliëncellen hunnen oorsprong nemen, waarvan de draden weder met eenige longitudinale zenuwvezels der voorzijde te zamen verbonden waren; deze longitudinale voorste strengen beschouwde ik als dragers van den indruk van onzen wil, waarvan de werking zich over eene bepaalde groep gangliëncellen verspreidt, om van hier met eene gelijke kracht alle zenuwdraden op te wekken, die uit eene dergelijke groep ontspringen.

Aan de achterzijde meende ik, dat de gevoelwortels bestonden uit zenuwdraden alleen voor gevoel, die niet in de grijze stof drongen, maar terstond zich naar boven begaven naar de hersenen, en uit reflexzenuwvezels, die, in de achterste horens dringende door middel der gangliëncellen en hunne draden, zich vereenigden met de groepen gangliëncellen, die in de voorste horens der grijze stof als bron voor bewegingszenuwen aanwezig zijn. Ik besloot, dat deze reflexdraden in meerdere groepen gangliëncellen overgingen en deze onderling meer of minder vereenigden, zoo dat bij reflexie meerdere gangliëngroepen en dus ook meerdere zenuwen en spieren tegelijk in werking werden gebragt, op welke wijze zich dus de coördinatie der spierwerking bij reflexbeweging eenvoudig liet verklaren. Iedere gangliëngroep bezat dus naar mijne voorstelling twee polen, te weten de voorste en bovenste van de hersenen

---

* Zie *Aanteekeningen in de Sectie voor Nat. en Gen.* l. c. pag. 8.

afkomstig, als dragers van den indruk van den wil, en eene naar beneden aan de achterzijde voor de reflexzenuwen, terwijl op beiderlei werkingen ontladingen uit de gangliëngroepen moeten volgen, en evenzeer de coördinatie der spieren bewaard blijven.

Dit was in het kort de hoofdinhoud van mijne waarnemingen, die ik ook in verschillende dieren had uitgestrekt, en door meerdere bewijsgronden meende te kunnen staven.

In dezen tusschentijd is de fijnere structuur en zamenstelling van het ruggemerg door meerdere beroemde schrijvers nader onderzocht geworden, hetgeen echter tot zeer verschillende uitkomsten en meeningen heeft geleid, zoodat wij in onze kennis aangaande het maaksel van het ruggemerg nog op verre na niet tot zekerheid gekomen zijn; echter is het mij aangenaam te zien, dat door de laatste onderzoekingen meer en meer alle stellingen bevestigd zijn, die ik in 1848 heb voorgedragen, en die in dat jaar gedrukt zijn *. Om deze redenen acht ik het niet geheel onnut, nadat ik de vroegere onderzoekingen voor eenigen tijd op nieuw heb opgevat, en hiervoor eene geheel nieuwe en verbeterde wijze van bereiden heb ontdekt, mijne waarnemingen door latere onderzoekingen verrijkt en uitgebreid, andermaal voor te dragen.

Vervolgen wij eerst, wat andere schrijvers omtrent dit gewigtig onderwerp nader hebben aan het licht gebragt, om zoo als in één tafereel een overzigt te kunnen geven van het standpunt, waartoe wij thans in dit gedeelte gekomen zijn.

Nadat het scheen, dat door den arbeid van Stilling, Volkmann en Wagner de oude leer van eenen onmiddelijken zamenhang der zenuwen door het ruggemerg met de hersenen meer en meer twijfelachtig werd, en dreigde geheel te zullen worden verworpen, vond dit gevoelen van den oorsprong der zenuwen in het ruggemerg eenen hevigen bestrijder in Kölliker, die door nieuwe onderzoekingen en berekeningen weder het oude gevoelen van eenen directen oorsprong van alle zenuwen uit de hersenen zocht te handhaven, en de gronden van Volkmann te wederleggen †.

Dat inderdaad in het bovenste gedeelte van het ruggemerg alle zenuwdraden, die van het ruggemerg uitloopen, kunnen bevat zijn, hetgeen, zooals wij boven gezien hebben, op zeer aannemelijke gronden Volkmann had

---

* Zie *Aanteekeningen van de Sectie-vergadering van het Prov. Utr. Gen.* Junij 1848.

† *Mikrosk. Anat.* 2 B. 1 St. pag. 425 sqq.

ontkend *, trachtte Kölliker te betoogen door nieuwe afmetingen van de dikte der zenuwwortels, vergeleken met de steeds naar boven toenemende hoeveelheid der mergstof in het ruggemerg †, hetgeen hij vooral meende waarschijnlijk te maken door de meerdere dunheid der zenuwdraden in het ruggemerg dan in de zenuwen, waarover Volkmann wel gesproken, maar het niet nader bepaald had §. Het krachtige boven medegedeelde bewijs van Volkmann van het groot verschil tusschen de dunheid van het ruggemerg en de dikte van het groot aantal zenuwen bij den *Crotalus mutus*, zocht Kölliker zonder eenig verder bewijs te ontzenuwen en te wederleggen, door de geheel hypothetische stelling, dat in deze slang de mergdraden in het ruggemerg zoo veel dunner zullen zijn, dat zijne berekening hierop toch toepasselijk is **.

Wie echter door eigen onderzoek bekend is met de fijnheid der mergdraden in het ruggemerg, met hun inderdaad verbazend groot getal, en de moeijelijkheid van schatting der hoeveelheid in een kwadraatlinie, met de menigte van gangliëncellen en hunne uitloopende, zich ook in het merg uitstrekkende draden, met de verschillende rigting, die de zenuwdraden en grijze vezelen in het ruggemerg volgen, zoo als longitudinale en dwarse, moet spoedig tot de overtuiging geraken, dat dergelijke metingen en vergelijkingen van Kölliker op eene zeer onzekere basis berusten, en inderdaad weinig bewijzen, zoo als deze metingen dan ook later door Schilling ††, zoo als wij zullen zien, genoegzaam zijn wederlegd.

Met deze hoofdvraag, of de spinaalzenuwen alle uit de hersenen ontspringen, staat in het naauwste verband het nut der multipolaire gangliëncellen. Kölliker neemt namelijk aan, dat deze gangliëncellen nergens met de zenuwen zamenhangen; hij vond, dat de draden, van deze cellen afkomstig, in steeds fijnere en fijnere takken zich verdeelen; zoodat, wanneer er eene zamenhang met de zenuwen moest plaats hebben, dit slechts met de fijnste

* Wagner, *Phys. Wort.* 2 B. pag. 482 sqq.

† *Mikrosk. Anat.* 2 B. 1 Abth. pag. 431 sqq.

§ *Mikrosk. Anat.* l. c. pag. 434.

** l. c. pag. 436 sqq.

†† E. G. Schilling, *De Med. Spen. textura Dorpat.* 1852.

het geval kon zijn *. Hij houdt het voor onmogelijk, dat eene verlenging van eene centrale gangliëncel als cylinderas in de dubbel gecontoureerde zenuwvezel overgaat, hoezeer in een later opstel WAGNER bepaald getuigt, dat ontwijfelbaar gezien te hebben †; waarvan ik niet alleen de zwarigheid niet inzie, daar niet alle draden der gangliëncellen in dergelijke fijne netten uitloopen, maar deze waarneming van WAGNER ook meer dan eenmaal bepaald heb bevestigd gevonden.

KÖLLIKER schijnt echter zelf de zwarigheden van zijne denkbeelden te gevoelen, daar hij later zegt, dat hij den oorsprong der zenuwen en het merg niet alleen niet ontkent, maar voor zeer waarschijnlijk houdt; alleen meent hij, dat hiervoor geene directe feiten pleiten §. Dit klinkt inderdaad vreemd; daar hem de latere stellige waarneming van WAGNER en LEUCKART bekend was **, maar waarvan hij de juistheid ontkent; waardoor hij zich geenszins geheel van eenzijdigheid kan vrij pleiten, van geene waargenomene daadzaken van anderen te willen aannemen, wanneer deze met zijne eens opgevatte meening strijden.

Doch niet alleen ontkent KÖLLIKER den directen zamenhang van deze gangliëncellen met de zenuwwortels, maar ook de onderlinge verbinding dezer gangliëncellen door middel van hunne vertakte draden neemt hij niet aan ††), of zoo zij aanwezig zouden zijn, zouden zij zeer zeldzaam voorkomen, daar KÖLLIKER die nimmer gezien had §§. Hierdoor vervalt hij in eene zonderlinge tegenspraak met zich zelven in zijne physiologische verklaringen van de werkingen van het ruggemerg; hij zegt namelijk, bij vermelding van de proeven van VAN DEEN, STILLING en EIGENBRODT, over de willekeurige beweging, die ook na de halfzijdige doorsnijding van het ruggemerg nog onder de snede aanwezig zoude zijn, hetgeen KÖLLIKER zelve bevestigd vond ***, dat aan

---

* l. c. pag. 425.

† GOTT. *Gelehrth. Anzeig.* 1850. Febr. N°. 4. pag. 53 sq.

§ l. c. pag. 426.

** l. c. pag. 425.

†† l. c. pag. 425.

§§ *Skizze einer Wissenschaftl. Reise nach Holland u. z. w.* in *Zeitschrift f. Wissensch., Zoog.* III B. 1 St. 1850 pag. 85.

*** l. c. pag. 438 sq.

een verband (Vermittlung) van gevoel en willekeurige beweging alleen door contiguiteit niet kan gedacht worden, daar dan de leiding door het merg niet aan den gang of aan het verloop van bepaalde vezels zoude gebonden zijn *, iets, waarin ik geheel met KÖLLIKER instem; later echter stelt hij weder, dat de reflex-verschijnselen, die in de grijze stof plaats hebben, niet noodwendig aan de continuiteit van vezels zouden gebonden zijn, daar zij in geheel verwijderde gedeelten voorkomen †; hij meent, dat onder bijzondere omstandigheden, dat is, bij eigenaardige prikkels of eene ongewone stemming van de hersenen of het ruggemerg van den bepaalden gang der leiding door vezels afgeweken wordt, en in de grijze stof eene zoogenoemde dwarsleiding, dat is, overbrenging van den toestand der gevoel- en bewegingvezels aan de graauwe stof plaats vindt, die zich dan verder aan andere zenuwdraden zoude mededeelen §. Daar echter de reflex-verschijnselen niet alleen in vivisectien en ongewone toestanden, maar ook in slikking, hoesten, niezen en eene menigte andere physiologische verschijnselen plaats hebben, kan men deze niet door een ongewone stemming verklaren, en de juiste bepaalde bewegingen, die b. v. bij slikking in het zoo zamengesteld verband der spieren noodig zijn, toonen wel, dat de overspringing van den prikkel der gevoel- op de beweegzenuwen niet diffus door eene onbepaalde dwarsleiding, maar wel degelijk langs bepaalde voorgeschrevene banen verrigt wordt, waardoor deze werkingen altijd en bij alle individuën zich op dezelfde wijze vertoonen. Neemt KÖLLIKER nu het onmogelijke aan van eene dwarsleiding in de mergvezelen bij de proeven van VAN DEEN en STILLING, dan zie ik niet, waarom hij deze dwarsleiding wel aanneemt bij reflexie, die hij vermoedt, dat in de grijze stof, en wel door de gangliëncellen plaats heeft, tenzij dit is, om zijne leer, dat de draden der gangliëncellen niet onderling, noch met de zenuwen te zamenhangen, staande te houden.

Om nu echter van het zoo vreemde verschijnsel rekenschap te geven, dat ook nog na het doorsnijden van de eene helft van het ruggemerg, noch de willekeurige beweging, noch de reflexverschijnselen aan de doorgesneden zijde worden verhinderd, stelt KÖLLIKER, in navolging van ARNOLD, de zinrijke

---

* l. c. pag. 439.

† l. c. pag. 442.

§ l. c. pag. 443.

hypothese voor, dat de mergdraden van het ruggemerg slechts voor de eene helft zich kruisen, zoodat dus eene bewegingszenuw bijv. van de regterzijde draden bevat, zoowel uit de regter- als uit de linkerzijde, met dat gevolg, dat indien de regterzijde wordt doorgesneden, de deelen onder de doorsnede door de draden van de linkerzijde nog willekeurig kunnen bewogen worden, hetgeen hij in eene schematische figuur verduidelijkt *. Hoezeer inderdaad op deze wijze van vele verschijnselen rekenschap kan gegeven worden, kan men echter meerdere bezwaren tegen deze verklaring aanvoeren.

Door deze voorstelling van den halfgekruisden loop der zenuwdraden in het ruggemerg, wordt vooreerst geene verklaring gegeven van het verschijnsel, dat indien het ruggemerg half wordt doorgesneden, kort boven de voor- of achterpootszenuwen, deze pooten dan geheel verlamd zijn, welke proeven door van Deen voor eenige jaren ook in mijne tegenwoordigheid in het werk zijn gesteld voor den achterpoot †, en door Stilling boven den voorpoot met hetzelfde gevolg §; die ook door Eigenbrodt zijn bevestigd **. Er bestaat geene reden, waarom hier de tegenovergestelde ongekruisde en niet doorgesneden vezels tegelijk verlamd zouden worden, hetgeen volgens de verklaring van Kölliker het geval niet moest zijn, en toch standvastig plaats heeft.

Indien verder deze verklaring juist is, dan moet men aannemen, dat de ongekruisde streng met de zijde van het ruggemerg, waardoor hij loopt, in geen verband schijnt te staan, hetgeen hoogst vreemd en ongelooflijk is; immers is het bekend, dat, na eene beroerte in de hersenen, hemiplegie of verlamming der eene zijde bestaat; maar nu is aan de tegenovergestelde zijde, die in het ruggemerg dan ook verlamde draden moet bezitten (de ongekruisde), geen spoor van eenig letsel te bespeuren, zoodat bij eene verlamming aan de regterzijde ook de linkerhelft van het ruggemerg ongekruisde, doch verlamde mergdraden zoude moeten bevatten, die echter op dit linker gedeelte van het ruggemerg geenerlei invloed uitoefenen, daar op deze zijde niets ziekelijks te bespeuren is.

Wij zullen later zien, hoe al deze verschijnselen zich veel ongedwongener

---

* l. c. pag. 440, Fig. 131.

† Van Deen, *Nadere ontdekkingen over de eigenschappen van het Ruggemerg.* Leiden 1839, pag 61, proef 47.

§ Stilling, *Untersuchungen ueber die Funct. d. Ruck.* Leips. 1842, pag. 243, proef 47.

** *Ueber die Sectiongsgezetze im Ruckenmark.* Giessen 1849, pag. 50.

laten verklaren, en keeren liever tot de geschiedkundige opgave van hetgeen in dit moeijelijke veld verrigt is, terug.

Zonder met de onderzoekingen van Kölliker bekend te zijn, volgde J. Clarke te Londen eene geheel andere wijze om dunne plaatjes van het ruggemerg doorschijnend te maken, hetwelk wij later bij onderlinge vergelijking zullen opgeven, waardoor hij eene groote doorschijnendheid schijnt verkregen te hebben; hij onderzocht in meerdere dwarse doorsneden den verschillenden vorm van de voorste en achterste horens der grijze stof op verschillende hoogten van het ruggemerg, den onderscheiden loop der zenuwwortels door de grijze stof, en de gangliëncellen met hunne vertakte draden, hetgeen hij door vrij goede, eenige zelfs zeer fraaije afbeeldingen opheldert *.

Uitvoerig behandelt hij vooral de dwarse vezels, waarvan een gedeelte als zenuwwortels in hunne banen van achteren naar voren volgens hem verloopen, zich in bundels verdeelen, en in de grijze stof een netwerk vormen, waar tusschen de gangliëncellen gelegen zijn; eenige van deze achterste draden gaan zelfs, volgens Clarke, in de voorste zenuwwortels over, althans zijn de voorste en achterste zenuwwortels in het midden als met een netwerk dooreen gevlochten; de dwarse zijdelingsche vezels volgen een anderen loop en vormen de commissuren in het centrum van het ruggemerg; ook van deze hangen, volgens hem, vele vezels met de voorste en achterste zenuwwortels zamen †. De achterste wortels onderscheiden zich, doordien zij met meerder, breeder en talrijker bundels dooreen loopen, en eene soort van plexus vormen §, waaruit bijzondere bundels in de achterste horens dringen en de substantia gelatinosa doorkruisen; eenige dringen in de commissuren, terwijl anderen in het sponsachtig gedeelte der achterste horens zich in een netwerk verdeelen en in de voorste horens overgaan; eenige draden gaan over in de achterste en zijdelingsche longitudinale witte strengen.

De voorste zijdelingsche strengen dringen, zonder eerst met elkander doorweven te zijn, tot in de voorste horens; verdeelen zich hier in zeer smalle bundels en afgezonderde draden, die verschillende rigtingen doorloopen; van deze vezels gaan eenige in den uitwendigen rand der voorste horens en dringen in de voorste zijdelingsche strengen; andere, na rondom door de groepen

---

* *Phil. Transact.* 1851, part. II, pag. 607, Tab. XX—XXV.

† l. c. pag. 609, Tab. XX, Fig. 1, 2, 3 en vooral Tab. XXIII, Fig. 14.

§ l. c. pag. 606, Pl. XXI, Fig. 6 en Fig. 14.

van gangliëncellen gedrongen te zijn, loopen naar binnen en vereenigen zich met de voorste commissuren, waar zij zich met die der andere zijde decusseren. De overigen gaan in het centrum der voorste horens en verliezen zich in het netwerk der gangliëncellen *.

De gangliëncellen zijn volgens Clarke door hare uitloopende draden onderling vereenigd, die zich in steeds fijnere en fijnere takken verdeelen, zoodat de ruimte tusschen deze takken ingenomen wordt door een hoogst fijn net van zeer delicate vezels. Vele van deze draden, vooral der gangliëncellen, die op den rand der grijze horens gelegen zijn, loopen uit tusschen de witte longitudinale strengen, waartusschen zich ook bloedvaten bevinden, zonder dat hij kon bepalen, of deze draden in de bloedvaten overgaan †.

Dat deze gangliëncellen in eene zeer naauwe betrekking staan tot de zenuwen, meent hij te moeten besluiten uit de inderdaad opmerkelijke waarneming, *dat zij niet alleen altijd in de nabijheid zijn der zenuwwortels, maar dat zij in aantal toenemen in eene directe reden tot de meerdere dikte der zenuwen, waarmede zij verbonden zijn* §.

Desniettemin zegt hij, dat hij nimmer eenigen directen zamenhang tusschen deze draden en de zenuwen heeft kunnen waarnemen; de zenuwdraden loopen, volgens hem, rondom de gangliëncellen, en zijn er schijnbaar mede in aanraking, maar deze aanraking draagt niet het karakter van ware verbinding. Hoogst opmerkelijk is echter hetgeen hij er op laat volgen, dat het zeer algemeen is te zien, dat een of twee van de celdraden naar buiten in eenen bundel uitloopen der voorste of achterste zenuwwortels, waarvan hij inderdaad eene overtuigende afbeelding geeft, juist zoo als ik dit ook gevonden heb **. Hij ziet echter deze uitloopers in de zenuwwortels niet aan voor een zenuwoorsprong, omdat hij dergelijke uitloopers der gangliëncellen ook tusschen de witte longitudinale strengen met bloedvaten zag verloopen, waar geene zenuwen of zenuwwortels zich bevonden. Was hij doorgedrongen tot den dieperen zamenhang van longitudinale en dwarse vezelen en hare functiën, dan zoude hij zich door deze laatste opmerking niet van

* Pag. 617, Tab. XXIII, Fig. 14, Tab. XXV, Fig. 15.

† l. c. pag. 614.

§ l. c.

** l. c pag. 615, Tab. XXV, Fig. 15.

het ware spoor hebben laten brengen, maar den zenuwoorsprong uit de gangliëncellen, die hij in twee gangliëncellen en drie draden zeer goed afbeeldt, erkend hebben.

Hij eindigt zijn betoog met eenige gevolgtrekkingen, waaruit wij, om niet in herhalingen te vallen, slechts zullen overnemen, dat volgens hem twee aanzienlijke kolommen van multipolaire gangliëncellen, die hij de achterste vesiculaire kolommen noemt, in eene innige verbindtenis zijn met de achterste zenuwwortels door de geheele lengte van het ruggemerg, van onderen smal beginnende, zeer in omvang toenemende in de lenden- en cervicale aanzwelling en eindigende in het verlengde merg. Dat nog eene kolom van cellen, waaruit in den hals de *nervus accessorius* zijn oorsprong neemt, zich ook naar beneden tot in de lenden-aanzwelling uitstrekt; maar dat de *nervus accessorius* de eenige zenuw is, die uit deze zijdelingsche vesiculaire kolom zijn oorsprong neemt; hoezeer ook deze *nervus accessorius* zijne wortels uitstrekt tot de voorste kolom van gangliëncellen *, terwijl overal, vooral in de voorste horens, het getal gangliëncellen in eene directe evenredigheid is tot de dikte der zenuwen †.

Het zijn vooral de latere onderzoekingen van RUDOLPH WAGNER, hoezeer ook door KÖLLIKER in twijfel getrokken, die aan de meening, dat de zenuwen uit de gangliënkogels haren oorsprong ontleenen, groot gewigt bijzetten.

Reeds in 1850 berigt VOLKMANN, dat LEUCKART, onder hem werkende, meerdere plaatsen vond, waar de overgang van draden der multipolaire gangliëncellen in echte primitieve zenuwdraden, zoowel als in eene verbinding onder elkander overtuigend scheen plaats te hebben; het gelukte hun beiden later eenen draad van eene multipolaire cel in een donker randige, dubbel gecontoureerde hersen- en zenuwdraad bepaald te zien overgaan. Men kan dus, voegt WAGNER er bij, hieruit besluiten, dat van zulk eene cel een verlengsel als cylinderas afgaat, als eene primitief vezel door het ligchaam verloopt, om ten laatste als cylinderas in de vrije einden (peripherie) meestal vertakt uit te loopen en in de weefsels te eindigen §.

Deze onderzoekingen worden door latere van denzelfden schrijver omtrent de electrische lobben in de hersenen der Sidderroggen zeer bevestigd. Hij

---

* l. c. Tab. XXV, Fig. 13.

† l. c. pag. 618.

§ *Gott. Gelehrt. Anzeig.* 1850, Tab. N°. 4, pag. 53 sq.

zegt, dat deze lobben geheel en al aggregaten zijn van zeer groote multipolaire gangliëncellen. Naar de peripherie toe gaan hieruit verlengsels, die van tweederlei aard zijn; eenige zijn niet vertakt en gaan onmiddellijk in gewone dubbel gecontoureerde zenuwdraden over, wier cylinderassen zij vormen. Wel ontbreekt dikwijls de dubbel gecontoureerde buitenrand, daar deze zeer los met de cylinderas verbonden is, en het meertal dezer verlengsels mist steeds dezen uitwendigen buitenrand; maar, zegt hij, wij hebben met alle mogelijke zekerheid grootere en kleinere fragmenten van dezen buitenrand aan enkele verlengsels, dan eens digt aan den oorsprong, dan weder in het verdere verloop gezien *. In den regel ontspringt, volgens hem, van ieder gangliënligchaam één, zeldzamer schijnen twee echte zenuwdraden er van te ontstaan. De overige, nu eens vertakte, dan weder niet vertakte verlengsels dienen daartoe, om de enkele gangliëncellen onder elkander, dan eens in de nabijheid, dan weder op grooteren afstand in verbinding te brengen †. Eindelijk heeft Ecker van deze praeparaten zeer fraaije en volkomen overtuigende afbeeldingen in zijne *Icones Physiologicae* gegeven §, waarin niet alleen duidelijk de overgang van de draden der multipolaire gangliëncellen in primitive zenuwdraden zigtbaar is, maar ook de onderlinge verbinding dier cellen, vooral in Fig. VI en VIII ontwijfelbaar wordt aangetoond. Geheel analoog aan deze electrische lobben, zegt Wagner verder, zijn de zenuwkernen van den *vagus, accessorius, hypoglossus* en *trigeminus*, namelijk insulaire ophoopingen van multipolaire gangliëncellen in de grijze stof, die vezels uitzenden, opnemen, en die onder elkanderen door fijne zenuwdraden brugachtig worden verbonden **.

Met een enkel woord willen wij nog aanstippen, dat ook Engel uit zijne waarnemingen omtrent de larven van kikvorschen besluit, dat de zenuwen in het ruggemerg eindigen ††, hetgeen door Blattman in volwassene kikvorschen bevestigd wordt, die verzekert, ook in kleinere vogels, visschen, en zelfs in

---

* *Gött. Gelehrt. Anz.*, 1851, Oct. pag. 190.

† l. c.

§ Ecker, *Icones Physiol.*, 2 Heft. Taf. XV, Fig. III, VI, VII, VIII en X.

** l. c. pag. 191.

†† *Zeitschrift der Keis. Kon. Geselschaft der Aertze in Wien.* Nov. 1847, pag. 113 etc. Dit ken ik alleen door citaten, maar had geene gelegenheid het oorspronkelijke te raadplegen.

muizen zich overtuigd te hebben, dat de zenuwen in het ruggemerg eindigen *. Ik betwijfel echter, of de zenuwwortels in het ruggemerg zoo plotseling met al hunne vezels in een gesloten bundel ophouden, zonder eenige uitloopers af te geven, zoo als hij die stomp eindigende in zijne afbeeldingen voorstelt †. Hij erkent desniettemin, dat er verbindingen tusschen zenuwdraden en gangliëncellen voorkomen, ofschoon hij zegt minder zijne aandacht hierop gevestigd te hebben, en ware gangliënkogels bij kikvorschen tamelijk zeldzaam zijn §), terwijl hij later weder spreekt van vele vrije kernen der gangliëncellen in de grijze stof. Ik vermoed, dat zijne wijze van deze deelen te onderzoeken, hierbij van veel invloed zal geweest zijn.

Van meer gewigt zijn de onderzoekingen van G. SCHILLING **, die uitvoerig eerst spreekt over de afmetingen van KÖLLIKER, en hare juistheid met de hieruit afgeleide gevolgen bestrijdt. Hij erkent wel, dat in het cervikaal gedeelte van het ruggemerg, de dikte der mergstof grooter is dan in het dorsaalgedeelte, en hier grooter dan in het lendengedeelte, maar dit gaat niet geleidelijk; er zijn twee plaatsen boven het cervikaal- en boven het lendengedeelte, waar de mergstof stellig dunner is dan in de lager geplaatste gedeelten ††. De afbeeldingen der dwarse doorsneden van het ruggemerg van KÖLLIKER §§ noemt hij, en naar mijn inzien teregt, onjuist ***.

Bovendien heeft er wel eene toename in de voor- en achterstrengen, maar niet zoo zeer in de zijdelingsche strengen plaats, die echter de meeste mergstof bevatten †††. Bovendien zijn de grenzen van grijze en mergstof zelfs onder het microscoop niet zoo bepaald, daar de grijze stof aan alle zijden uitloopers afgeeft in de mergstof, en hierdoor vele dwarse zenuwvezels loopen,

---

* BLATTMAN, *Mikrosk. Anatom. Darstellung der Centralorgan des Nervensystems.* 1850, pag. 46.

† l. c. pag. 46 sqq en pag. 53, Fig. 1 en 2.

§ l. c. pag. 18.

** *De Medullae spinal. textura ratione inprimis habita originis cerebralis nervorum spinalium* Dorpat. 1852.

†† l. c. pag. 9 sq.

§§ *Mikrosk. Anat.* pag. 431.

*** *De Med. Spin. text.* pag. 10.

††† l. c. pag. 11.

waardoor de dikte der mergstof vergroot wordt *. Eindelijk zijn niet alle longitudinale draden der mergstof even dun, waarop Kölliker gerekend had: hij trof er dikkere aan dan de zenuwvezelen zelve, en de evenredigheid tusschen deze dikke en dunne kan niet bepaald worden; waarom hij besluit, dat hetgeen Kölliker op deze gronden tegen Volkmann aanvoert, van geenerlei gewigt is †.

Ten opzigte der zenuwwortels zegt hij, in tegenstelling van de waarneming van Clarke, dat hij nooit de vezels der voorste zenuwwortels, nadat zij in de horens der grijze stof zijn ingetreden, in de commissuren zag overgaan, noch tot in de vezels der achterste horens zag dringen, noch, hetgeen Kölliker beweert, boogsgewijs in de witte strengen zag uitloopen. In enkele gevallen zag hij duidelijk den zenuwdraad van den voorsten wortel in eene gangliëncel intreden, zoodat de lijnen van den zenuwdraad in de lijnen van den draad van eene gangliëncel overgingen; in één geval was deze overgang zoo duidelijk, dat over den directen zamenhang geen twijfel bestaan kon, iets, hetwelk hij met te meer zorg waarnam, daar dit omtrent den oorsprong der zenuwen van het grootste gewigt was §. Ook in longitudinale secties zag hij de wortels der zenuwdraden nooit de grenzen der gangliëncellen overschrijden, maar wel enkele malen een zenuwwortel van eene gangliëncel ontspringen **.

Onder de longitudinale witte strengen vond hij vezelen, die, uit de grijze stof of zelfs uit de gangliëncellen ontstaande en zich naar boven ombuigende, als witte mergdraden naar de hersenen verliepen ††; de achterste zenuwwortels zag hij echter ten deele in de longitudinale witte strengen overgaan §§.

Eindelijk, en dit is van gewigt, zegt hij, dat de longitudinale vezelen, althans de voorste en middelste strengen, uit de grijze stof ontspringen, en wel uit de gangliëncellen, terwijl uit dezelfde gangliëncellen ook de wortels der zenuwen hunnen oorsprong nemen en dus beiden door middel van deze cellen

---

* l. c. pag. 12.

† l. c. pag. 54.

§ l. c. pag. 29.

** l. c. Tab. II, Fig. 5, *b*, *c*.

†† l. c. pag. 33, Tab. II, Fig. 5, *d*.

§§ l. c. pag. 40.

verbonden zijn *. Zoo komt dan ook, volgens hem, het volumen der grijze stof overeen met den omvang der zenuwwortels, en de dikte dezer laatste stemt weder overeen met de toename der longitudinale vezelen, die de hersenkracht in de zenuwen, en de zenuwkracht naar de hersenen overbrengen; al hetgeen geheel overeenkomt met hetgeen wij in 1848 in de sectievergaderingen hebben voorgedragen, doch hetgeen dezen schrijver onbekend was. Als slotsom besluit hij:

1) Dat de longitudinale mergvezels van het ruggemerg van beneden naar boven bestendig in getal toenemen;

2) Dat deze longitudinale vezels uit de grijze stof, en althans voor een gedeelte uit de gangliëncellen haren oorsprong nemen;

3) Dat het getal der lange vezelen, even als het getal der vezelen, die in eenen zenuwdraad overgaan, van het onderste gedeelte van het ruggemerg af in dezelfde reden toenemen, als de grijze stof in omvang wint;

4) De vezels der voorste zenuwwortels ontspringen uit de voorste horens der grijze stof, en wel uit de gangliëncellen;

5) Het grooter gedeelte der achterste wortels gaat waarschijnelijk in de longitudinale vezelen over, die in de achterste horens aanwezig zijn;

6) De grijze stof bevat geene eigene vezels, dan die uit de commissuren ontspringen;

7) Ook de voorste commissuur bestaat uit grijze stof.

Deze laatste was door Kölliker en de meeste schrijvers als eene witte commissuur beschreven; ik moet echter uit mijne eigene waarnemingen het gevoelen over den grijzen aard dier vezelen van Schilling bevestigen, wiens schoone afbeelding † geheel met de natuur overeenstemt.

Eindelijk worden deze uitkomsten nog bevestigd door de onderzoekingen van Gratiolet §. Van Schilling wijkt hij af, door de voorste commissuur nog als uit witte mergachtige vezels bestaande te houden.

In de voorste horens der grijze stof beschrijft hij de multipolaire gangliëncellen als niet gelijkmatig verspreid, maar in verschillende groepen opgehoopt, vooral in de nabijheid der witte bundels; in de aangezwollen gedeelten van het ruggemerg zijn deze groepen grooter dan in de engere gedeelten, grooter

* l. c. pag. 55.

† l. c. Tab. I.

§ *Structure de la matière epinière* in *l'Institut.* 1851, *Aout*, pag. 272 sqq.

in grootere dieren dan in kleinere; zij hangen volgens hem onderling te zamen en zijn niet geïsoleerd; hunne uitstralingen of draden verdeelen zich meer en meer en vormen eene groote vlecht met onregelmatige mazen, vooral in de ruminantia duidelijk waar te nemen; deze mazen zijn verlengd in de nabijheid der witte bundels, meer afgerond in het midden der grijze stof, in de lendenaanzwelling het grootst en talrijkst.

Behalve deze zeer duidelijke verbindingen, waardoor deze gangliëncellen zich tot een systeem vereenigen, kan men bij een naauwkeurig onderzoek een groot getal zenuwdraden vervolgen tot in deze multipolaire gangliëncellen, en de continuiteit aantoonen van een zeker aantal vezels der voorste zenuwwortels met bepaalde verlengsels dezer gangliëncellen; zoodat deze gangliëncellen aan de eene zijde in verbinding zijn met de voorste en middelste strengen van het ruggemerg, en ten anderen met de wortels der voorste of beweegzenuwen. Hij voegt er bij, dat deze feiten door hem met uiterste naauwkeurigheid bevestigd en waargenomen zijn.

Minder gelukkig was hij in zijn onderzoek der achterste wortels, aangaande hun verband met de grijze stof. Bij longitudinale secties ziet men de vezels der achterste wortels zich in de achterste longitudinale strengen ombuigen, die door deze wortels voor een groot deel schijnen zamengesteld te worden. Van de voorste bundels dezer wortels gaan eenige vezels naar de achterste grijze commissuur, andere gaan in de substantia spongiosa, waar zij kleine bundels vormen, waardoor de substantia gelatinosa gestreept is. Niettegenstaande alle pogingen is het hem niet gelukt, verbindingen tusschen deze vezels en de gangliëncellen te vinden, hoezeer hij die vermoedt.

De stralen der gangliëncellen, de draden der voorste zenuwwortels en de bundels der achterste wortels vormen in de voorste horens een weefsel, hetgeen niet te ontrafelen is, en hetwelk door een groot getal vezels der voorste zenuwwortels en door de middelste bundels, die van de eene zijde van het ruggemerg naar de andere in de voorste horens overgaan (*commissura anterior*) nog vermeerderd worden. De vezels echter der voorste zenuwwortels schijnen, volgens hem, niet direct in deze commissuur over te gaan.

Hij neemt verder als bewezen aan, dat de grijze centra aan wederzijden met elkanderen in verband staan, maar dat de zenuwwortels, die zich hierin begeven, zich niet kruisen met die der overgestelde zijde; de vezels, die zich hier kruisen, meent hij, dat tot de longitudinale vezels behooren, die naar de hersenen gaan.

Zien wij op de resultaten van de onderzoekingen dezer verschillende schrijvers, vooral in de laatste jaren, dan zijn hierdoor de onderzoekingen, die wij in 1848 hebben uitgegeven, zoozeer van alle zijden bevestigd, dat zoowel de oorsprong der zenuwen, vooral der voorste wortels uit de gangliëncellen, de onderlinge zamenhang der gangliëncellen, het overgaan ten deele van de achterste zenuwwortels in de witte strengen zoozeer bevestigd schijnen, dat een verder onderzoek bijna overbodig zoude kunnen geacht, en deze gewigtige feiten als uitgemaakt zouden kunnen beschouwd worden. Nadat ik in het jaar 1848 de eer had mijne waarnemingen in het Kon. Ned. Instituut mede te deelen, heb ik aan het toen ter tijd mij gedaan verzoek, deze ter uitgave aan te bieden niet voldaan, daar ik nog eenige twijfelachtig geblevene punten verder wenschte te onderzoeken. Dit werd door verschillende omstandigheden uitgesteld, vooral ook door het zeer tijdroovende van het vervaardigen der hiertoe dienstige voorwerpen, waarvan de moeijelijkheid vele doet mislukken. Bij het weder opvatten van dit gewigtig onderwerp, heb ik mij nu vooreerst voorgesteld de vraag, wat de oorzaak mogt zijn van de zoo uiteenloopende gevoelens van vele zoo geachte schrijvers en bekwame mikrotomen. Behalve de moeijelijkheid in het algemeen, om geschikte voorwerpen ter onderzoek voor het mikroskoop te verkrijgen, waarover wij in de inleiding met een enkel woord hebben gesproken, geloof ik, dat de verschillende methoden, door onderscheidene schrijvers gebezigd, om deze voorwerpen doorschijnend en voor het mikroskopisch onderzoek dienstbaar te maken, veel hiertoe hebben bijgedragen.

Stilling trachtte door het ruggemerg in wijngeest te leggen, de noodige verharding, om fijne sneedjes te vervaardigen, te verkrijgen; hij gebruikte hiertoe vrij sterke alcohol; ook wij hebben deze wijze van bewerking gevolgd, alleen heeft ons de ondervinding geleerd, dat gewone spiritus van 15 of 18 graden beter is dan sterkere; wel wordt door de laatste het ruggemerg spoediger verhard, maar ook spoediger treden veranderingen in het weefsel, doordien door het geestrijk vocht het vet wordt uitgetrokken, hetgeen zich als onregelmatige glomeruli of granulatien tusschen de vezels nederzet, en eindelijk tot grootere klompjes verzamelt, die het ruggemerg voor alle fijner onderzoek ongeschikt maken; in slappere volgt deze verandering veel trager, en men kan een verhard gedeelte veel langer gebruiken.

Kölliker heeft op het voetspoor van Hannover het chroomzuur zeer aanbevolen, waardoor inderdaad eene aanmerkelijke verharding verkregen

wordt, waarna hij het nu zeer ondoorschijnend geworden ruggemerg, door verdunde soda caustica helder maakt *, hetgeen vrij algemeen navolging heeft gevonden. Ook ik heb deze wijze beproefd, maar kan in den hoogen lof, door **Kölliker** hieraan toegeschreven, niet deelen. Wel kan men fijne sneedjes vervaardigen en deze door verdunde soda caustica doorschijnend maken; maar in het algemeen wordt het veld te gelijkvormig doorschijnend, en men kan niet genoeg de draden, vooral der gangliëncellen, volgen, die onzigtbaar worden, hetgeen mij bij vergelijking van alcohol-praeparaten duidelijk gebleken is.

Ook **Schilling** klaagt, dat de door acidum chromicum behandelde praeparaten weinig geschikt zijn om deze draden waar te nemen †, en het is mij zeer in het oog gevallen, dat in zijne zoo fraaije afbeeldingen, Tab. I en II, Fig. 1 en 2, de gangliëncellen overal zonder uitloopende draden worden afgebeeld; ofschoon hij de zenuwwortels buitengemeen fraai heeft uitgedrukt, en hierin vermoed ik, dat de voorname oorzaak zal gelegen zijn, waarom een overigens zoo naauwkeurig waarnemer, die onder de eerste mikroskopische waarnemers mag geteld worden, en wiens waarnemingen zich over het algemeen zoozeer door juistheid onderscheiden als **Kölliker**, hierin van de latere schrijvers zoo geheel afwijkt.

Een geheel anderen weg is **Clarke** ingeslagen in het vervaardigen van zijne praeparaten; hij beveelt aan om die, na de verharding in spiritus, op een glaasje te bevochtigen met een mengsel van drie deelen spiritus en een deel azijnzuur, hetgeen de grijze stof meer doorschijnend maakt. Volgens eene tweede methode laat hij het dunne sneedje eerst een à twee uren macereren in het mengsel van azijnzuur en spiritus, dan weder denzelfden tijd lang in zuiveren spiritus liggen; hierop brengt hij het in terpentijn, hetgeen den spiritus in den vorm van donkere droppels er uitdrijft en spoedig het sneedje volkomen doorschijnend maakt, hetgeen hij dan in Canada-balsem legt en met een glaasje bedekt §. Mij is deze wijze niet goed gelukt: het werd slechts ten deele helder, maar de gangliëncellen werden onduidelijk, waaruit het vet scheen te verdwijnen.

Wagner prijst eene oplossing van sublimaat aan.

---

* *Mikrosk. Anat.* II. *Th.*, 1 Abth., pag. 424.

† l. c. pag. 56 sq.

§ *Phil. Trans.*, 1851, Part 2, pag. 607 sq.

Nadat ik echter op nieuw dit moeijelijk onderzoek had opgevat, begreep ik, dat vooral de hoofdvraag gelegen was in eene methode, die alle voordeelen der vroegere in ruimere mate verschafte, zonder de nadeelen te bezitten; na het beproeven van meerdere zoutoplossingen, zuren, alcaliën, ook van glyzirrhine, had ik eindelijk het geluk, eene wijze te ontdekken, om deze voorwerpen voor het mikroskoop te vervaardigen, die naar mijne ervaring boven alle anderen verre de voorkeur verdient.

Men verharde eerst het ruggemerg, in niet te groote stukken afgedeeld, in spiritus, en zoo spoedig de hardheid genoegzaam is (want hoe korter het merg in spiritus gelegen heeft, des te duidelijker worden de praeparaten) vervaardigt men de fijne sneedjes *, legt nu een fijn sneedje met eenig gedistilleerd water op glas, dekt dit met een dekglaasje, en drukt nu afwisselend zeer zacht de beide overstaande randen van het dekglaasje, waardoor het water gedwongen wordt tusschen de vezels van het sneedje door te vloeijen. Zeer spoedig wordt dit water melkachtig, hetgeen men door gedurig droppelen aan den rand van het dekglaasje wegspoelt, en telkens de afwisselende drukking herhaalt, zoo lang tot het water niet meer melkachtig wordt. Men zorge hierbij, dat de druk zoo gering zij, dat het sneedje niet zeer van vorm verandert of zich uitbreidt, daar dan bij de afwisselende beweging, welke men aan het dekglaasje mededeelt, het sneedje vaneen scheurt, en door het doorspoelende water het verband der deelen wordt losgerukt. Op deze wijze, met eenige omzigtigheid, gelukt het gemakkelijk de vetkorrels en losgeworden gedeelten weg te spoelen, die de helderheid belemmeren. Men kan ook hetzelfde oogmerk bereiken, door het sneedje eenige oogenblikken in een horologieglas in aether te leggen; maar laat men het hierin te lang liggen, b. v. meer dan een half uur, dan worden de gangliëncellen onzigtbaar, doordien het korrelige vet uit de gangliëncellen verdwijnt en te zeer wordt opgelost. Het doorspoelen met water is mij altijd voldoende voorgekomen; door nu veel water aan den rand van het dekglaasje te brengen en het glas scheef te houden, glijdt het dekglaasje van zelve van het voorwerp af, zonder dat te beschadigen. Men vege dan het omringende water af, en brenge met een glazen staafje een paar droppels geconcen-

* Ik bedien mij hiertoe van een breed, scherp scheermes, hetgeen op den voorvinger der linker hand rust, en waarmede men de rigting der snede zeer juist besturen kan. Het is van belang de bovenvlakte van het mes met water te bevochtigen, anders kleeft het dunne sneedje te sterk aan het mes en wordt bij de snijdende beweging van het mes te vroeg afgescheurd.

treerde oplossing van chlorcalcium op het sneedje, en dekt het nu met het dekglaasje; drukt het een weinig, zonder het voorwerp te zeer te beschadigen, en laat het nu liggen; reeds na een half uur en vroeger ziet men, dat het begint doorschijnende te worden, en deze doorschijnendheid neemt toe, zoodat na 8 of 10 dagen het voorwerp uiterst doorschijnend is en alle vezels duidelijk met scherpe randen zigtbaar zijn, waarbij vooral een zeer groot voordeel is, dat de fijne capillairvaten veel duidelijker zigtbaar worden en zich van de zenuwdraden laten onderscheiden. Het vet, hetgeen nog aanwezig is, begint zich dan soms nog later hier en daar in kleine korrels te verzamelen en eenige gedeelten minder helder te maken, vooral indien men vroeger niet genoegzaam het voorwerp met water heeft afgespoeld. Is dit het geval, zoo brenge men op nieuw chlorcalcium oplossing aan den rand van het dekglaasje, hetgeen dit opneemt, het dekglaasje losmaakt, hetwelk er nu gemakkelijk afschuift, men spoelt het op het glaasje met chlorcalcium oplossing af, dekt het op nieuw met het glaasje, laat het weder eenige dagen liggen en luteert nu de randen.

Ook eene oplossing van chlormagnesium maakt de sneedjes helderder, maar niet zoo spoedig; later worden toch ook de vezels uitnemend helder, echter ontstaan hierin soms kristallen, die men dan weder moet wegspoelen, terwijl ik over het algemeen aan de praeparaten in chlorcalcium wegens meerdere helderheid nog de voorkeur geef.

Een zeer groot voordeel van beide bereidingswijzen is, dat men de voorwerpen niet terstond behoeft te luteren; daar chlorcalcium-oplossing en ook, hoezeer in mindere mate, chlormagnesium bestendig het vocht uit de atmospheer trekt, droogen de praeparaten niet uit; men kan eene groote menigte voorwerpen vervaardigen en nu later onderling vergelijken en de fraaiste luteren met asphalt en bewaren, die nu ook om dezelfde reden nimmer bederven, doordien het chlorcalcium niet verdwijnt. Deze praeparaten zijn dus duurzaam, terwijl op deze wijze de draden der gangliëncellen en der zenuwen buitengemeen duidelijk zich vertoonen; de grijze stof wordt niet alleen helder, maar ook de mergstof vertoont zijn weefsel helder en duidelijk *. Ook de voorwerpen in acidum chromicum verhard, verkrijgen dezelfde

* Het schijnt, dat geconcentreerde oplossing van chlorcalcium aan de zenuwdraden en grijze stof voor een gedeelte het water onttrekt, en daardoor de groote doorschijnendheid dezer deelen teweeg brengt. Laat men het voorwerp eenigen tijd in eene oplossing van chlorcalcium liggen, zonder dekplaatje, zoo krimpt het zamen, waarop men dus letten moet.

helderheid door chlorcalcium, maar hierin ontstaan later kleine kristallen, en de glangliëncellen en hunne draden zijn niet zoo fraai als in de in spiritus verharde voorwerpen, ofschoon de zenuwdraden zeer fraai zigtbaar zijn. Men kan ook later beproeven de kristallen af te spoelen.

Door dit middel in staat gesteld om met meerdere duidelijkheid en zekerheid de fijnere structuur van het ruggemerg te onderzoeken, en zoo mogelijk, het zoo kunstig zamengesteld weefsel der natuur te ontrafelen, heb ik op nieuw de hoofdpunten van mijn vroeger onderzoek herhaald, en vooral, hetgeen mij meer of min twijfelachtig was gebleven, met de meeste naauwkeurigheid onderzocht.

Het is mij thans aangenaam de verzekering te kunnen geven, dat ik geen enkel punt, van hetgeen ik toen òf als zeker, òf als twijfelachtig stelde, behoef terug te nemen, maar alles heb bevestigd gevonden en met meerdere zekerheid heb kunnen vaststellen, dan vroeger het geval was, hetgeen ik bovendien nog door eenige nieuwere daadzaken heb kunnen bevestigen.

Wij zullen, na al het door andere schrijvers boven aangevoerde, geenszins in eene uitvoerige beschrijving van het zamenstel van het ruggemerg treden, maar ons vergenoegen met de voornaamste feiten op te teekenen, die door ons zijn waargenomen.

Wat vooreerst betreft de onderlinge verbinding van de multipolaire gangliënkogels, door middel van hunne verbindingsdraden, zoo hebben wij ons hiervan in een aanzienlijk getal praeparaten zoo zeer overtuigd, dat dit geen den minsten twijfel kan overlaten, en wij vermeenen thans in staat te zijn, ook den ongeloovigste, indien hij voor overtuiging vatbaar is, door het toonen van onze praeparaten, hiervan het bewijs te leveren. Intusschen is het niet gemakkelijk deze volkomene zekerheid te verkrijgen; in de grijze stof namelijk, vooral ter plaatse van deze gangliëncellen, is een zeer groot aantal hoogst fijne capillaire bloedvaten, die een zeer zamengesteld net vormen, hetgeen vooral om deze cellen loopt, en waarvan de takken dikwijls zeer bedriegelijk den schijn aannemen, van in deze cellen zelve over te gaan. Het is echter een eigen, niet ongewigtig voordeel van het aanwenden van eene oplossing van chlorcalcium, dat hierdoor de wanden der capillairvaten, door een eigen sterk geteekenden kant, zich van de draden der gangliëncellen onderscheiden; zoodat mijne vroegere praeparaten, die in eene verdunde oplossing van acidum arsenicosum waren bewaard, mij hierin nu en dan hebben misleid; hoezeer ook in deze de ware zamenhang duidelijk genoeg

zigtbaar is. Somwijlen zijn twee gangliëncellen nabij elkanderen met een vrij dikken draad verbonden *; meestal is de verbinding zigtbaar of tusschen de aangrenzende, of ook tusschen verder gelegene gangliëncellen †, zoodat niet zelden een verbindingsdraad over de naaste gangliëncel loopt zonder zamenhang, om zich met eene verdere te vereenigen §; somwijlen hangen de cellen met meer dan eenen communicatiedraad te zamen **. Het is echter niet mogelijk alle draden te vervolgen: vele zijn afgesneden, eene menigte dunne draden van de hoogste fijnheid vertoont zich tusschen de netten, die men niet verder vervolgen kan ††. Beide Figuren 1 en 2 zijn longitudinale sneedjes door de voorste horens; men ziet deze verhoudingen het best in de lendenaanzwelling van het ruggemerg eener koe; bij groote dieren zijn deze groepen van gangliëncellen het duidelijkst, en het getal dier cellen is hier veel aanzienlijker, waarvan wij later de physiologische reden zullen trachten op te geven.

Ook in meerdere dwarse sneedjes is mij deze zamenhang duidelijk gebleken.

Deze gangliëncellen zijn het menigvuldigst in de voorste horens, zoo als door de meeste schrijvers teregt is opgemerkt, en wel bijzonder bij de intrede der zenuwen; doch ook in het midden der voorste horens zijn de gangliëncellen met hunne draden in een groot aantal; echter is dit niet overal gelijk; in de lenden- en cervicaalaanzwelling zijn de voorste horens der grijze stof veel breeder, en het aantal multipolaire gangliëncellen is hier ongelijk veel grooter dan in het dorsaal gedeelte van het ruggemerg; zoodat, zooals Clarke §§, Schilling *** en Gratiolet ††† te regt opmerkten (zie boven),

---

* Zie Fig. 1 *a a'*, bij eene 100malige vergrooting. Ik geef in het algemeen, maar bijzonder in deze moeijelijke weefsels, verre de voorkeur aan niet te sterke vergrootingen: bij eene 80 tot ruim 100 malige vergrooting ziet men de vezels niet alleen scherper, maar ook een grooter veld toont de verbindingen duidelijker. Slechts als hulp en punt van vergelijking maak ik van sterkere vergrootingen gebruik.

† Fig. 1 *b c*.

§ Fig. 1 *e a'*. Fig. 2 *a b*.

** Fig. 1 *a d*.

†† Fig. 1.

§§ *Phil. Transact.*, l. c. pag. 614.

*** Schilling, l. c. pag. 39.

††† Gratiolet, *l'Institut.*, l. c.

het aantal multipolaire gangliëncellen in eene directe verhouding staat tot de dikte der zenuwen, die uit het ruggemerg ontspringen. Behalve dit algemeen verschil in aantal van gangliëncellen, hebben wij ook de gangliëncellen veel menigvuldiger gevonden op de plaatsen, waar de zenuwwortels in het ruggemerg indringen, dan in de tusschengedeelten, hetgeen dan ook geheel met het denkbeeld van den oorsprong der zenuwen uit deze multipolaire cellen overeenkomt, waarover wij later zullen spreken.

Behalve deze gangliëncellen in de voorste horens, die zich, zooals Kölliker opmerkt, door meerdere grootte onderscheiden, komen ook in de achterste horens gangliëncellen voor, maar in een geringer aantal; zij verschillen echter onderling; eenige, meer afzonderlijke, zijn nabij de intrede der achterste zenuwwortels in de horens, en bijzonder in de vezels, die rondom deze horens verloopen en hen somwijlen als een gordel omringen, welke vezels, door de schrijvers niet aangegeven, vooral in de lendenaanzwelling duidelijk zijn en zich naar het middelgedeelte der grijze stof begeven *; de cellen zijn hier meer langwerpig, bezitten een geringer aantal vertakte draden, en komen zeer goed overeen met die cellen, welke, volgens Kölliker, meer afzonderlijk tusschen de zenuwdraden der achterste horens worden aangetroffen en door hem zeer goed worden afgebeeld †. Ook midden in de achterste horens in de substantia gelatinosa beeldt Kölliker gangliëncellen af, die ik eveneens, maar dikwijls grooter heb aangetroffen, dan die door hem zijn voorgesteld §. Dit hangt echter af van het deel van het ruggemerg, hetgeen men onderzoekt; deze grootere zoowel als de buitenste, zoo even beschrevene, cellen worden vooral in de lendenaanzwelling aangetroffen, waar én de achterste horens breeder én de gangliëncellen ook grooter zijn, dan in het ruggedeelte.

Schilling schijnt deze gangliëncellen niet naauwkeurig te hebben waargenomen; althans ontbreken deze in zijne overigens zoo fraaije afbeelding van het ruggemerg.

Eindelijk hebben wij nog bestendig eene groep gangliëncellen aangetroffen, die ons zeer gewigtig voorkomen en waarvan vroegere schrijvers geene melding maken, tenzij, hetgeen mij zeer waarschijnlijk voorkomt, Kölliker deze

---

* Zie onze Figuur 8 *h g*.

† *Mikrosk. Anat.*, l. c. pag. 416 sq. Fig. 128.

§ l c. pag. 414. Fig. 126.

cellen vermeldt, zonder echter het juiste verband aan te geven *. Deze cellen liggen zeer na in eene kleine groep bijeen, in de uitstraling der achterste graauwe commissuur, waarin duidelijk hunne draden overgaan †; waarschijnlijk is het aan de minder gunstige wijze van het vervaardigen der praeparaten en het verharden door acidum chromicum toe te schrijven, dat vorige schrijvers deze gangliëncellen en hun verband tot de graauwe achterste commissuur niet hebben kunnen ontdekken; SCHILLING beeldt deze niet af, en zegt, dat hij niet durft verzekeren of deze dwarse vezelen der achterste commissuur ook dienen om de cellen onderling te verbinden §.

Intusschen zijn zij zeer duidelijk, ofschoon kleiner dan de cellen in de voorste horens; zij staan zeer digt bijeen; ook deze groep is in de lendenaanzwelling rijker en duidelijker. Deze cellen onderscheiden zich van die in de voorste horens door een minder getal draden; vele zijn langwerpig, driehoekig, en de kleinere staan gemeenlijk zeer na bijeen. In de physiologische verklaring van het ruggemerg zullen wij nader ook op deze cellen terugkomen, die uitsluitend met de achterste commissuur in verband staan.

Eindelijk zijn er nog afzonderlijke gangliëncellen tusschen de witte mergstof of longitudinale draden; zij zijn gelegen in de zijdelingsche uitloopende draden der grijze stof, die zich bij eene dwarse doorsnede tusschen de mergstof verdeelen, van welke stralen STILLING het eerst eene afbeelding gegeven heeft **, en die door TODD en BOWMAN als processus van grijze stof worden beschouwd, waarin bloedvaten uit de pia mater dringen ††. Inderdaad bevindt zich in deze zijdelingsche stralen dikwijls ook een bloedvat, doch geenszins bestendig, die in sneedjes in chlorcalcium gelegd zeer duidelijk van de zenuwdraden zich onderscheiden laten. Deze cellen zijn in een gering aantal en steeds afzonderlijk; zij zijn meest in de nabijheid der grijze stof. Reeds

* l. c. pag. 413. Fig. 125. In zijne afbeelding der dwarse doorsnede van het ruggemerg, Tab. IV, Fig. 3, zijn de gangliëncellen slechts door stippen aangegeven, en zeer onnaauwkeurig; dit is meer eene schematische figuur.

† Zie Fig, 11 *g g*. Fig. 12 *k l*.

§ l. c. pag. 58.

** *Ueber die Medulla oblongata*, pag. 5. Taf. 2. Fig. 1—4.

†† TODD, *in Cyclopaedia of Anat. and Phys.* voce *Nervous Syst.*, pag. 708. TODD and BOWMAN, *Anat. and Phgsiol.* Pars II, pag. 259.

Clarke, zoo als wij boven gezien hebben, nam deze gangliëncellen waar*; ook Kölliker spreekt er over, zonder echter hunne waarschijnlijke physiologische beteekenis aan te geven †.

Uit dit alles besluiten wij, dat, zooals Clarke teregt heeft aangegeven, er meerdere kolommen van multipolaire gangliëncellen in het ruggemerg aanwezig zijn, die zich door de geheele lengte van het ruggemerg uitstrekken, waarvan die in de voorste horens de voornaamste zijn; vervolgens terzijde van de achterste commissuur; dan nog in het midden der grijze stof, tusschen de voorste en achterste horens, en eindelijk in de achterste horens zelve, als de kleinste. Deze kolommen zijn echter niet te beschouwen als geheel op zich zelve staande, integendeel hangen zij allen meer of minder te zamen. Vooral die uit de voorste horens strekken zich uit tot tegen het begin of de basis der voorste horens, of het midden tusschen de beide horens, en de hier geplaatste gangliëncellen hangen door hunne draden naauw te zamen met de groep terzijde van de commissuren §.

Deze verticale kolommen zijn echter, in de longitudinale rigting beschouwd, van zeer ongelijke uitbreiding; niet alleen zijn zij tusschen de cervicaal- en lendenaanzwelling grooter en rijker aan cellen, maar ook neemt het aantal cellen toe, waar de wortels der zenuwen in het ruggemerg en de grijze stof dringen; zij vormen dus meer of min zamenhangende groepen, die in eene longitudinale rigting boven elkander geplaatst zijn.

Het gewigt, in eenen physiologischen zin, van deze multipolaire cellen hangt ten naauwste te zamen met hare verbindingen, niet alleen onderling, maar vooral met de zenuwwortels. Wij hebben boven gezien, hoezeer de verschillende schrijvers op dit punt afwijken, dat echter, nadat Kölliker allen zamenhang met zenuwwortels had ontkend, door lateren deze zamenhang meer en meer is bevestigd.

Nadat wij vroeger dezen zamenhang in eenige voorwerpen meenden met genoegzame zekerheid te kunnen aantoonen, hebben wij echter op nieuw, geholpen door de meerdere helderheid, die wij thans door middel van chlorcalcium aan onze mikroskopische voorwerpen aanbrengen, dit gewigtig vraagstuk zooveel mogelijk onderzocht. Ook hierbij heeft om de meerdere dikte der ze-

* *Phil. Trans.*, l. c. p. 610.

† *Mikr. Anat.*, l. c. pag 416. Zie in een overlangs sneedje deze cellen in Fig 6. *g*.

§ Fig 12, *l. k*.

nuwwortels het lendengedeelte van eene koe mij het beste voldaan. — Tot dit oogmerk make men zoo wel dwarse als longitudinale secties; de laatste zoo veel mogelijk bij de intrede der voorste wortels, in de rigting naar den voorsten hoorn der grijze stof, of liever evenwijdig aan den loop dezer zenuwdraden.

Bij eene dwarse rigting gelukt het meermalen de zenuwdraden zeer fraai en onafgebroken van buiten tot in den hoorn te kunnen vervolgen; zij onderscheiden zich in dikkere en dunnere bundels, die vrij regt van buiten tot in de grijze stof doordringen; bij de intrede in de grijze stof liggen meest eenige multipolaire gangliëncellen, waarvan het somwijlen gelukt excentrische draden in de zenuwwortels of zijdelingsche uitstralingen te kunnen vervolgen, zooals zeer duidelijk door Clarke is afgebeeld *, ofschoon hij het gewigt van dit feit niet heeft erkend.

Ook mij is dit meermalen voorgekomen, waarvan ik in Fig. 3 eene zoo naauwkeurig mogelijke afbeelding heb getracht te geven; waar men tevens het net ziet van onderlinge communicatiedraden, waartusschen echter ook een paar bloedvaten, *a a*, zigtbaar zijn; terwijl men bij *b b b b* draden ziet van de gangliëncellen afkomstig, die zich in de zenuwwortels uitbreiden; men hoede zich echter fijne bloedvaten, die de intredende zenuwwortels gewoonlijk vergezellen, met zenuwdraden of uitloopers der gangliëncellen te verwisselen. De zamenhang, of liever de oorsprong der zenuwen, aan de voor- of beweegzijde, uit de gangliëncellen, is mij echter gelukt veel overtuigender te vinden in eenige longitudinale secties. Nadat men eerst op de dwarse snede naauwkeurig de rigting van den voorsten hoorn en de intrede der zenuwen heeft bepaald, rigte men het mes zoo veel mogelijk parallel met de intrede der zenuw; maakt men dan in die rigting dunne plaatjes, die zoowel de intrede der zenuw bevatten, als ook tot in de grijze stof doordringen, dan ziet men zeer ligt de wortels der zenuwdraden dwars tusschen de longitudinale vezels tot den voorsten grijzen hoorn doordringen. Zeldzamer echter gelukt het bij het groot getal van gangliëncellen, dat men hier het verband met zekerheid zien kan; meest loopen de zenuwwortels tusschen de gangliëncellen door en eindigen zonder met deze zamen te hangen, dat is, zij zijn afgesneden. Bij de dunheid van een dergelijk sneedje, en daar deze zenuwwortels niet geheel regt, meestal meer of min golvend verloopen, kan dit niet bevreemden; soms echter, wanneer men toevallig de juiste rigting getroffen heeft, is dit verband dan ook zoo over-

* *Phil. Trans.*, l. c. Fig. 15.

tuigend, dat het geen den minsten twijfel overlaat. Onder eenige sneedjes, waar het mij gelukt is, dit verband duidelijk te zien, heb ik één zoo getrouw mogelijk afgebeeld, waar vooral dit verband hoogst gelukkig bewaard was, en overtuigend duidelijk zich vertoonde; zoodat verre de meeste zenuwdraden op deze plaats zich tot in hun verband met de gangliëncellen lieten vervolgen.

Men ziet dit in Fig. 4 voorgesteld, waar slechts eenige weinige longitudinale mergvezelen, *a a*, bewaard zijn, om de teekening niet onnoodig te vergrooten. Men ziet hier aan de benedenzijde, onder 1, niet minder dan 8 draden in verbinding met gangliëncellen, terwijl van den bovensten bundel nog 4 draden zich tot gangliëncellen lieten vervolgen. Onder deze draden zijn die met 1 1′ geteekend beide afkomstig van éene gangliëncel, de voorste in het midden, die aan iederen bundel eenen draad afgeeft; bij 2 ziet men twee draden, van het eene eind van eene gangliëncel afkomstig, terwijl de gangliëncel, gemerkt 4, eveneens twee draden afgeeft, die in eene scheeve rigting onder de andere zenuwdraden door naar den bovensten bundel bij 3 uitloopen, zooals ook de gangliëncel 5 nog een schuins loopenden zenuwdraad afgeeft, die over eene andere gangliëncel heen loopende nabij 1′ uitloopt; bij 6 is de verst verwijderde gangliëncel, die met de zenuwdraden te zamen hangt; alleen van den niet vervolgden bundel bij 7 vereenigde zich nog een draad met eene nog verder gelegene cel, doch die ik, om de teekening niet noodeloos grooter te maken, heb weggelaten; verder ziet men hier zeer fraai, hoe vele ganglièn zich onderling verbinden, zoo als de cel 8, en de cellen met 9 gemerkt. De meeste verbindingsdraden echter dezer cellen zijn afgesneden en vertoonen zich niet verder, terwijl nog vele draden, in het voorwerp zigtbaar, doch die zich niet lieten vervolgen, en die de teekening slechts onduidelijk zouden gemaakt hebben, niet zijn opgenomen; daar het onmogelijk is den rijkdom in de natuur geheel in eene teekening terug te geven. Ook op meerdere plaatsen in ditzelfde zeer gelukkig uitgevallen voorwerp was de overgang der zenuwdraden in de gangliëncellen overtuigend duidelijk; het voorwerp is uit het lendengedeelte van eene koe. Hieruit blijkt de oorsprong der voorste zenuwwortels uit de gangliëncellen zoo duidelijk, dat hieraan niet meer kan getwijfeld worden.

Maakt men eene dwarse snede, die zoo gelukkig genomen is, waarvan ik meerdere voorwerpen bezit, dat ze juist de intrede van een zwaarderen zenuwwortel in de grijze stof vertoont, dan vind ik meest bij elkanderen twee zenuwwortels, die bij de intrede in den hoorn zich zijdelings en centraal

verspreiden en elkander overkruisen; vele draden loopen langs den buitenrand des hoorns, andere verspreiden zich midden door den hoorn, waarvan SCHILLING eene zeer fraaije afbeelding heeft gegeven *, waarin echter slechts dunne zenuwwortels zijn aangegeven, terwijl, zoo als wij reeds boven hebben opgemerkt, nergens eenige uitloopende draad of zamenhang der gangliëncellen met de zenuwen is uitgedrukt.

In een zeer fraai voorwerp, onder meerdere andere, was de verbreiding der zenuwwortels bij eene dwarse snede zeer duidelijk, waarvan ik eene zoo naauwkeurig mogelijke afteekening gemaakt heb in Fig. 5. Men ziet ook hier eene vrij zware zenuw *a* en eene dunnere *b* door het merggedeelte in de voorste grijze stof overgaan, waarvan eenige draden zich met gangliëncellen *c c c* vereenigen †.

Er kan dus wel geen twijfel overblijven, of de wortels der beweegzenuwen ontspringen uit het ruggemerg, en wel uit gangliëncellen der voorste horens, die onderling zich tot een net vereenigen, en dikwijls zich in meer of minder afgezonderde groepen verdeelen.

De hoofdvraag is dus: op welke wijze zijn nu deze zenuwwortels door middel van het gangliënnet, waarin zij overgaan, met de hersenen verbonden?

Dat de voorste medullaire draden, die in Fig. 5 als dwars doorgesneden bij A A A worden voorgesteld, de dragers van de werking van onzen wil zijn op de bewegingszenuwen, is door alle physiologen erkend en aan geenen twijfel onderhevig. Niet zoo duidelijk is echter het verband aangegeven tusschen deze medullaire draden en de grijze stof. Om dit verband aan te toonen, is het noodwendig, dat wij eerst op eenige andere deelen van het ruggemerg opmerkzaam maken, hetgeen naar onze meening hiermede in een onmiddelijk verband staat; namelijk op de dwarse vezels, die tusschen de medullaire longitudinale vezels aan alle zijden gevonden worden, en als stralen uit de grijze stof zich tusschen de witte meer of min getakt verspreiden. Zie Fig. 12 *f g h*.

STILLING heeft deze dwarse vezels het eerst zeer fraai voorgesteld §, hij

* *De Med. Spin. text.* Tab. I.

† Een rijk net van gangliëncellen was iets verder van den rand der grijze stof naar het midden toe geplaatst; doch om de teekening niet te zeer te vergrooten en te zamengesteld te maken, zijn deze weggelaten, en de gangliëncellen *c c c*, die tot eene zeer rijke groep behooren, nog in de teekening gebragt, hoezeer zij iets verder afgelegen en de zenuwwortels te dezer plaatsen dus iets langer waren; de verbinding kan in eenige duidelijk worden nagegaan.

§ STILLING, *Ueber die Textur und Function der Med. obl.* Pl. 1, 2.

beschrijft deze als uiterst fijne verlengsels van graauwe dwarsvezels, die van binnen naar buiten gaan, zonder zich aan de periphaerie tot een zenuwstam te verbinden; deze fijne vezels begeleiden volgens hem meestal verlengsels der pia mater en vaten, en zouden als vaatzenuwen, die in de voeding van het ruggemerg en zijne deelen voorzien, moeten beschouwd worden *. In de medulla oblongata worden deze vezelen talrijker en meer zamengesteld, zoodat zij zelfs ten deele een zeer zamengesteld net vormen, welk net, volgens Stilling, door een deel der achterste zenuwwortels zoude gevormd worden, die tusschen de longitudinale vezelen afgescheiden doordringen †. Dat deze uitstralende vezeldraden meest tot de bloedvaten in betrekking zouden staan, is door de meeste schrijvers, zoo als wij boven hebben aangegeven §, aangenomen. Kölliker beschouwt echter deze stralen als het vervolg der motorische zenuwwortels, en wel van de buitenste in de voorste horens intredende wortelvezels, die volgens hem, meest in kleinere bundels of zelfs in enkele vezels opgelost en daardoor minder duidelijk te zien, voor een gedeelte naar achteren, voor een gedeelte boogvormig naar buiten verloopen en zich eindelijk naar de voorste helft der zijstrengen toewenden, waar zij door de uitwendige groep van gangliëncellen (zonder zich volgens Kölliker hiermede te verbinden) doorgaan en in de zijdelingsche strengen zich verliezen. Hij zegt verder, dat in longitudinale secties men wel niet hunne verbinding met de voorste wortels, maar (hetgeen gewigtig is) wel hunne verbinding met de zijstrengen erkent. Deze dwarse vezels dringen tot een verschillenden afstand in de zijstrengen in, tot na aan de helft of zelfs verder, buigen zich dan naar boven om, en verloopen nu als longitudinale vezels verder **. In zijne schematische figuren teekent hij deze dwarse stralen echter niet af ††.

Clarke schijnt deze stralen geheel alleen als bloedvaten te beschouwen, hetgeen waarschijnlijk het gevolg is van zijne wijze om de sneedjes te bereiden, waarbij de fijnste zenuwvezels zoozeer veranderd worden, dat zij on-

---

* l. c. pag. 5. Ook in zijn vroeger werk *Ueber die Textur des Ruckenmarcks*, maakt hij van deze dwarse vezels gewag, zonder die echter duidelijk af te beelden, pag. 21 sq.

† l. c. pag. 8.

§ l. c. pag. 30.

** Kölliker, *Mikrosk. Anat.* pag. 419.

†† l. c. Tab. IV, Fig. 3.

zigtbaar zijn, terwijl de bloedvaten duidelijk te voorschijn treden; hij beeldt dan ook alleen bloedvaten af met hunne menigvuldige takverdeelingen *.

Schilling spreekt van dezelfde dwarse vezels en zegt, dat de substantia cinerea onder het mikroskoop beschouwd, als met vele tanden en scherpe naalden voorzien zich vertoont, en duidelijke verlengsels uitzendt, waarvan vele door de witte stof tot aan den omvang van het ruggemerg doorloopen †. Zeer vreemd is het echter, dat Schilling, die ook aanneemt, dat de zenuwwortels in de grijze stof eindigen en in gangliëncellen overgaan, toch deze zijdelingsche stralen, ofschoon zij geheel niet met de zenuwwortels te zamen hangen, voor scheef indringende zenuwvezels houdt, die om die reden bij eene dwarse doorsnede zich slechts voor een gedeelte zouden vertoonen en niet tot aan de peripherie doordringen §; om deze redenen houdt Schilling dan ook met Kölliker alle dwarse draden in het merggedeelte voor zenuwdraden **. Hoe het echter mogelijk is, zich deze dwarse stralen in de zijdelingsche strengen als verlengsels der zenuwwortels voor te stellen, die in de grijze stof in de gangliëncellen zouden eindigen, begrijp ik niet: men behoeft slechts de afbeelding van Schilling zelve te raadplegen, om overtuigd te zijn, dat de dwarse stralen in de zijdelingsche strengen buiten alle verbinding zijn met de voorste zenuwwortels ††. Reeds Todd en Bowman hebben dit denkbeeld, hetwelk vroeger door Stilling ook reeds is voorgesteld, teregt wederlegd §§.

Uit deze opgaven blijkt duidelijk genoeg, dat men omtrent den aard en het wezen dezer dwarse vezels geenszins tot eenig duidelijk begrip is gekomen; ten gevolge echter van mijne onderzoekingen, vermeen ik het schijnbaar raadselachtige dezer vezels genoegzaam te kunnen verklaren. Door de gekromde en zich verspreidende loop dezer dwarse vezels door het merg, gelukt het zeldzaam deze dwarse vezels en hun verband tot de longitudinale strengen te vinden; het is mij echter inderdaad gebleken, dat zij zich ombuigen en in

---

* *Phil. Trans.* l. c. pag. 615, Pl. XXI, XXII, XXIV, XXV.

† Schilling, l. c. pag. 11.

§ l. c. pag. 26.

** l. c. pag. 35.

†† l. c. Tab. I.

§§ *Physiol. Anat.* Part 2, pag. 259.

de longitudinale vezels overgaan, zoo als ik in Fig. 6 naar een zeer gelukkig longitudinaal sneedje, uit de voor-zijdelingsche strengen genomen, heb afgebeeld; men ziet hier de dwarse strengen *c d* zich in de longitudinale vezels ombuigen; doch tevens de binnenste longitudinale vezels zich naar de grijze stof ombuigen en in de gangliëncellen overgaan bij *a g*, iets hetwelk ook SCHILLING afbeeldt, en zegt slechts eenmaal te hebben waargenomen *. Wij hebben dit meermalen aangetroffen en in dat voorwerp kwam dit op meerdere plaatsen voor, waarvan slechts een gedeelte is afgebeeld †.

Zelfs nog tusschen de longitudinale strengen ontmoet men somwijlen eene gangliëncel §, die waarschijnlijk dient tot verbinding van de longitudinale vezelen met de dieper doordringende dwarse stralen. Deze gangliëncellen hangen door hunne communicatiedraden met andere gangliëncellen te zamen, zooals ook in de afbeelding is aangegeven. Zeer duidelijk echter blijkt het verband dezer vezelen in de vroeger reeds vermelde dwarse doorsnede, in Fig. 5. Men ziet hier namelijk twee zenuwwortels, *a b*, in de grijze stof indringen, die van hunne intrede in het ruggemerg tot in de grijze stof zeer fraai zich vertoonden, maar waarvan, om de figuur niet te zeer te vergrooten, slechts een klein gedeelte der stammen is afgebeeld. Aan weerszijde van deze zenuwen ziet men bij *f*, *g*, *h* en *i* de dwarse vezelstralen uit de grijze stof zich in het witte merg A A A begeven, waar zij, na vele vertakkingen gemaakt te hebben, te niet loopen vóór zij den buitensten omtrek van het merg hebben bereikt. Bij *f* en *g* ziet men eenige dezer vezels terstond in gangliëncellen overgaan; andere vezels buigen zich echter regts en links om langs de peripherie der grijze stof. Bijzonder duidelijk echter is dit in de vezels van de stralen *i*, waarvan eenige nog uit de verdere in de figuur niet opgenomene meer zijdelingsche stralen ontstaan, en zich meest alle naar de zenuw ombuigen en tusschen de vezels van den zenuwwortel zonder eenige vermenging doorgaan, om te eindigen in de gangliëncellen bij *e* en *d*; hetgeen in dit voorwerp overtuigend duidelijk was. Deze gangliëncellen hangen weder te zamen met het groote gangliënnet, waarvan de cellen *c c c*, waaruit de zenuwwortels hunnen oorsprong nemen, een klein gedeelte uitmaken. Een bundel van den zenuw-

* SCHILLING, l. c. Tab. II. Fig. *a b*, pag. 39.

† Fig. 6 bij *a* en *g*.

§ Fig. 6 bij *g*.

wortel *a* ziet men echter ook nog schuins in de straal *h* overgaan, en van hier verder in de grijze stof dringen en in gangliëncellen eindigen.

Uit dit alles is de beteekenis dezer draden niet moeijelijk: de longitudinale witte strengen namelijk blijven, gelijk alle schrijvers hebben opgemerkt, meest eenen parallellen loop houden, en schijnen nergens te eindigen; doch uit de grijze stof stralen zijdelingsche dwarse bundels uit, die zich tusschen de witte strengen verdeelen en verspreiden, en hare vezels opnemen, Fig. 6 *c, e d f*; zoodat de longitudinale vezels, als dragers van onzen wil, in deze dwarse vezels overgaan, waardoor de indruk van onzen wil langs deze stralen naar het gangliënnet wordt overgebragt, waaruit de beweegzenuwen haren oorsprong nemen. Dit verklaart van zelf, waarom aan den buitenrand der grijze stof zoovele gangliëncellen gelegen zijn, waarin men de zenuwwortels niet ziet overgaan *; deze laatste ontspringen meer uit het midden van den voorsten hoorn, namelijk uit de gangliëngroep, die aan alle zijden communicatiedraden ontvangt, die uit de randgangliën of uit de dwarse stralen zelve ontstaan.

Niet altijd echter ziet men eene dergelijke overkruising der dwarse straalvezels met den zenuwwortel bij zijne intrede; somwijlen schijnen de draden van den zenuwwortel zelve voor een deel zich langs den rand der grijze stof om te buigen, en hier in cellen, die met de straalvezels te zamenhangen, over te gaan, terwijl andere vezels meer het midden houden en tot de hoofdgroep der gangliëncellen doordringen.

Deze dwarse straalvezels zijn dus de communicatiewegen tusschen de voorste en zijdelingsche longitudinale strengen met de grijze stof, of liever met de gangliëncellen, waaruit de zenuwwortels ontspringen. Hieruit verklaart zich ook waarom de longitudinale vezels dezer witte strengen zulk eenen evenwijdigen loop bewaren; zij moesten immers een meer gevlochten aanzien vertoonen, indien gedurig bundels der longitudinale vezels van buiten tusschen de anderen door zich naar het centrum in de grijze stof begaven: nu integendeel blijkt het, dat de grijze stof dwarse stralen afzendt, die zich tusschen de longitudinale vezels meer en meer verdeelen, en zoo eindelijk zich ombuigende deze vezels

---

* Door deze waarneming werd CLARKE, zooals wij boven gezien hebben, misleid, daar hij, ziende dat de verlengde draden der gangliëncellen ook in de zijdelingsche stralen uitliepen, die met geene zenuwwortels in verbinding stonden, maar volgens hem meest uit bloedvaten bestonden, besloot, dat de verlengde draden der cellen in de zenuwen zelve, die hij zoo fraai afbeeldt, ook niet met de zenuwwortels in verband konden staan, maar slechts dienden om de vaten te vergezellen. Zie boven pag. 17.

opnemen, of, als men wil, daarin overgaan. Van hier ook, dat deze stralen het menigvuldigst zijn, waar de zwaarste zenuwen ontspringen, of waar de meest zamengestelde zenuwverbindingen gelegen zijn; men vergelijke slechts de drie eerste afbeeldingen van het werk van Stilling, over de medulla oblongata, om zich hiervan te overtuigen, b. v. Pl. II, Fig. 1, uit het ruggegedeelte, met Fig. 3 en 4 uit de cervicaalaanzwelling. Regt duidelijk echter kunnen wij dit verband eerst aangeven, wanneer wij tot de physiologische explicatie van dit verwonderlijk weefsel der vezels in het ruggemerg gekomen zijn, waarop wij den lezer verwijzen, doch waartoe wij vooraf het zamenstel van het ruggemerg en haar weefsel in zijn geheel moeten verklaren.

Veel moeijelijker is het onderzoek omtrent het zamenstel der achterste horens en de hierin tredende zenuwwortels: deze grootere moeijelijkheid ontstaat ten deele door de meerdere zamengesteldheid van de hier in zeer verschillende rigting loopende vezels en hun onderling verband; deels door de grootere fijnheid der zenuwdraden, zoodat het veel moeijelijker wordt die met genoegzame duidelijkheid, althans afzonderlijk te volgen; deels ook door de zoo opmerkelijke verschijnselen der reflexie, die onbetwistbaar in het ruggemerg plaats hebben, en waarvan eene voldoende verklaring zulk een groot struikelblok voor de physiologen heeft uitgemaakt. Het is dan ook niet vreemd, dat omtrent het zamenstel van dit gedeelte en het verloop der gevoelwortels, verschillende denkbeelden door onderscheidene schrijvers zijn voorgesteld.

Wij hebben reeds boven (pag. 5 sq.) gezien, dat, om deze verschijnselen van reflexie te verklaren, Volkmann zijne toevlugt nam tot het denkbeeld van eene dwarsleiding, waardoor dus een prikkel van eene gevoel- op eene bewegingszenuw zoude overspringen *. Wagner stelde de zeer ingenieuse hypothese voor, dat de multipolaire gangliëncellen het verband tusschen deze zenuwen uitmaakten en hierdoor de prikkel van de gevoel- op de beweegzenuwen werd overgebragt †. Deze zoo eenvoudige en waarschijnlijke verklaring werd door de meeste latere schrijvers verworpen. Nadat Marshall Hall het bestaan van reflexzenuwen of excito-motorische had verondersteld en aangenomen, werd het bestaan dezer zenuwen door meerdere schrijvers bestreden; uitvoerig zocht

---

* *Phys. Wort.* l. c. pag. 528.

† l. c. pag.398 sqq. Zie boven pag, 6.

vooral Todd het aanwezen van dergelijke zenuwen te wederleggen *. Todd en Bowman nemen aan, dat beide de voorste en achterste zenuwen in de grijze stof en het ruggemerg eindigen, en verzekeren, dat zij na scheiding van het ruggemerg en volgens de rigting der achterste wortels gevonden hebben, dat deze wortels blijven doorgaan tot in de voorzijdelingsche strengen, en weinig of geene verbinding hebben met de achterste strengen †. Zij stellen zich voor, dat de voorste strengen van het ruggemerg dienen voor gevoel en beweging tevens, en dat de achterste strengen, die volgens hen in de achterste hoorns overgaan, als verbindingsvezelen tusschen de hersenen en het ruggemerg de coördinatie der bewegingen te weeg brengen §.

Clarke meent, gelijk wij boven zagen, eveneens dat de wortels der achterste zenuwen door de achterste hoorns der grijze stof heen met de voorste wortels en de commissuren zamenhangen; eenige draden gaan, volgens hem, weder uit de grijze stof, en hangen dan te zamen met de achterste en zijdelingsche strengen **).

Schilling, die, zoo als wij gezien hebben, de voorste wortels van de gangliëncellen doet ontspringen, zegt, dat de achterste wortels nimmer tot in de voorste hoorns doordringen; ook hij erkent het hoogst bezwaarlijke om deze fijne draden te vervolgen; hij meent echter, dat de achterste longitudinale draden uit de vezels der achterste wortels bestaan ††; in de gelatineuse stof van de achterste hoorns zag hij echter nooit vezels of bundels in de longitudinale draden overgaan §§, maar zag bundels der achterste wortels zich naar boven, en, hetgeen opmerkelijk is, ook naar beneden zich ombuigen, die in de longitudinale vezels zich schenen te verlengen ***. Volgens hem dringen alle zenuwwortels in de grijze stof †††, maar de achterste vormen longitudinale

* *Physiolog. anat.*, Part 2, pag. 307 sqq. en vooral *Cyclopaedia of Anat. and Physiol. voce Physiol. of nervous system*, 721, U. sqq.

† Todd and Bowman, *Physiol., anat.* l. c. pag. 302.

§ l. c. pag. 321.

** Clarke, *Phil. Transact.*, l. c. pag. 616.

†† Schilling, l. c. pag. 40.

§§ l. c. pag. 31.

*** l. c. pag. 31, Tab. II, fig. 1 *e*.

††† l. c. pag. 56.

bundels in den grijzen achtersten hoorn, waarin zij overgaan *. Evenzeer beklaagt zich GRATIOLET, dat hij in het onderzoek over den oorsprong der achterste wortels minder gelukkig is geweest; hij meent echter, dat deze wortels in de achterste longitudinale strengen zich ombuigen, en hierin overgaan †.

Ook wij bekennen gaarne, dat het onderzoek omtrent den oorsprong en het verloop der achterste zenuwwortels ons veel moeijelijker is voorgekomen dan van de voorste; door onze heldere en duidelijke praeparaten, door middel van chlorcalcium, meenen wij toch eene schrede verder hierin te zijn gekomen. Indien men bij de intrede der achterste wortels eene longitudinale, dunne snede vervaardigt, ziet men doorgaans, dat een of meerdere wortels het ruggemerg intreden, maar dan zich terstond naar boven in de longitudinale strengen ombuigen; zoodat het overtuigend is, dat althans een gedeelte van de zenuwvezels direct in de achterste longitudinale strengen overgaan.

Wij hebben hiervan eene teekening vervaardigd, Fig. 7, waar men bij *a* tot *b* een wortel zich terstond in de longitudinale strengen ziet ombuigen; deze strengen worden weder door andere gedekt, en men kan die in gelukkige sneedjes vrij verre vervolgen; zij loopen parallel met de witte vezels naar boven, waarvan zij dan een gedeelte uitmaken, en worden dan door hooger ontspringende gevoelzenuwen gedekt, zoodat zij min of meer laagsgewijze (*imbricatim*) op elkander gelegen zijn. Van dit verloop of intrede der gevoelzenuw bezit ik meerdere voorbeelden, zoodat het mij inderdaad vreemd is, dat deze loop dier zenuwwortels door andere Schrijvers niet genoegzaam is opgemerkt, die meest allen deze zenuwwortels tot in de achterste hoorns zochten te vervolgen, en waarschijnlijk de ombuiging juist onder de pia meninx hebben voorbijgezien, hoezeer REMACK dezen loop der gevoelzenuwen in den kikvorsch reeds in 1844 heeft aangegeven §, en reeds EHRENBERG, VALENTIN en BUDGE met hulp van het mikroskoop de gevoelvezelen zich naar boven zagen ombuigen **. Zooals wij boven reeds hebben opgemerkt, is het onderste gedeelte van het ruggemerg bij koeijen, waar de gevoelzenuwen zoo zwaar zijn, voor dit onderzoek het geschiktst; waar zij bij andere dieren dunner

---

* pag. 61, N°. 5, Tab. I *e*.

† Zie boven pag. 23.

§ MULLER, *Arch.* 1844, pag. 177, Tab. VIII, Fig. 6, *q*, *u*, *s*.

** VOLKMANN, *Nervenphys.* l. c. pag. 511.

zijn, worden zij door de snede ligt afgescheurd, en men kan het verband niet meer met duidelijkheid vinden. Behalve deze naar boven in de longitudinale strengen overgaande wortels, komen uit de achterste strengen uit afzonderlijke bundels ook dwarse vezels, die zich naar het centrum of den achtersten hoorn begeven *, waarvan het echter bijna nimmer gelukt in eene longitudinale snede den loop ver te vervolgen, doordien zij te bogtig loopen †.

Des te beter gelukt dit in eene dwarse snede juist op de hoogte, waar de zenuwwortel in het ruggemerg treedt, genomen; bij deze rigting ziet men duidelijk, zooals reeds door Stilling en anderen is afgebeeld, den zenuwwortel in den grijzen achtersten hoorn indringen. Intusschen is het niet gemakkelijk het naauwkeurige beloop van deze vezels na te gaan, die vooral, waar zij door de gelatineuse stof der achterste hoorns loopen, van eene verbazende fijnheid en teederheid zijn, zoodat het zeer moeijelijk is hen te vervolgen.

Wij hebben van het verloop dezer zenuwwortels in Fig. 8 eene zoo naauwkeurig mogelijke afbeelding gemaakt; want om hier de natuur en den rijkdom van alle vervlechtingen en kronkelingen der intredende wortels volkomen terug te geven, acht ik bijna ondoenlijk. Wij zien hier een gedeelte van het ruggemerg, en wel den achtersten hoorn uit het lendengedeelte van eene koe, waar bij *a. b. c.* eenige zenuwwortels naast elkander het ruggemerg intreden, waarvan bij *a* en *c* een gedeelte zich na de intrede doorschijnender vertoont, en uit dwars doorgesneden opklimmende gevoelzenuwen schijnt te bestaan. Zeer spoedig verdeelen deze wortels zich in meerdere bundels, die ten deele weder onderling zamenhangen, en eene soort van plexus vormen, waarvan ik echter slechts de hoofdbundels heb aangegeven; deze bundels worden dus vaneen gescheiden door de achterste longitudinale vezels, waartusschen zij doordringen. Eindelijk bereiken deze bundels den achtersten hoorn der grijze stof, waarin

---

* Fig. 7 *c*, *d*.

† Om beide soorten van vezelen, de longitudinale en dwarse te zien, is het best in het lendengedeelte van eene koe het ruggemerg longitudinaal in twee gelijke helften te verdeelen volgens den loop der fissuren; nu snijdt men aan de achter-binnenzijde zoo veel van het merg af, dat men gekomen is tot aan de intrede der gevoelwortels, en begint nu zeer dunne sneedjes hiervan af te nemen, zoodat men iets, doch zeer weinig, van de longitudinale rigting afwijkt, dat is: dat men een dun segment van den bovensten worteldraad afneemt, terwijl men in het onderste gedeelte van het sneedje naauwelijks de zenuw geraakt heeft. Daar de dwarse en longitudinale draden uit verschillende bundels voortkomen, die niet geheel in dezelfde longitudinale rigting liggen, kan men op deze wijze beide zenuwdraden in *één* sneedje verkrijgen.

wij de meeste wortels als bundels van hoogst fijne vezels *g g* zien indringen, die men tot aan het centrum van den hoorn bij *d* en *e*, en somwijlen nog iets verder vervolgen kan, waar zij zich vooral rigten naar de gangliëncellen, die hier in eenige groepen, echter spaarzamer dan in de voorste hoorns, gelegen zijn. Of zij in de gangliëncellen overgaan, heb ik wegens de buitengemeene fijnheid met geene volkomene zekerheid kunnen beslissen; maar heb echter meermalen gezien, dat een dergelijke bundel of streng van deze fijne vezels tot in eene groep gangliëncellen, maar niet verder kon vervolgd worden; zoodat ik vermoed, dat zij hierin overgaan, waarom men deze vezels ook niet tot in de voorste horens, zoo als eenigen willen, vervolgen kan.

Behalve deze zenuwwortels komen hier echter nog andere vezels voor, waarop het mij toeschijnt, dat de aandacht der Schrijvers niet genoeg gevestigd is geweest; namelijk: de geheele achterste hoorn wordt door eenen meer of min dikken bundel van fijne vezels als met eenen band of gordel omgeven, hetgeen ook in de figuur bij *h h h* is uitgedrukt *. Deze laag van randvezels wordt gedurig versterkt door de stralen, die men vooral in dat gedeelte van het merg, waar de zenuw niet binnentreedt, met vele takken ziet uitstralen, en waarvan de meeste draden in deze randvezels overgaan; echter schijnen ook eenige draden der zenuwwortels zich in deze randvezels te begeven, hetgeen ik echter nog niet met volkomene zekerheid durf bevestigen. Dat deze randvezels intusschen vooral van de dwarse stralen, die hier, even als wij aan de voorste hoorns gezien hebben, de longitudinale mergstrengen doorkruisen, afkomstig zijn, blijkt daardoor, dat, indien men een dwars sneedje neemt, uit dit gedeelte van het ruggemerg tusschen twee zenuwwortels, waar geen zenuwwortel aanwezig is, deze stralen, hoezeer meest minder zamengesteld, echter toch aanwezig zijn, en deze randvezels heb ik in die sneedjes zelfs zeer zwaar gevonden †.

---

* Door deze randvezels is als het ware de achterste hoorn meer van de longitudinale strengen afgescheiden, en vanhier dat zoo ligt bij dunne dwarse sneedjes deze strengen van de achterste hoorns bij eene zeer geringe drukking afwijken; vooral waar geene reflexzenuwen in den hoorn ingaan, waar het verband dan slechts door dunne spaarzame stralen onderhouden wordt.

† Het nut dezer achterste stralen is mij niet duidelijk geworden; hun verloop in de randvezelen, en verder door middel van deze, naar het middelpunt van den achtersten hoorn, Fig. 8 *h h h k k*, schijnt een verband aan te duiden tusschen de achterste strengen van het ruggemerg of geleiddraden van het gevoel en het middelpunt van reflex; hetgeen mij echter physiologisch niet duidelijk is, daar de reflexverschijnselen geen inwendig gevoel opwekken. Veel minder kunnen zij voor irradiatie van

Vooral is het opmerkelijk, dat deze randvezels vele kleine, meest langwerpige gangliëncellen bezitten, Fig. 8 *hh*; niet overal zijn deze gangliëncellen even menigvuldig, soms zeldzamer, soms in een vrij aanzienlijk getal; zelfs in een sneedje vond ik twee duidelijke gangliëncellen in het witte merg buiten de randcellen, Fig. 8 *ii*, zonder dat deze met de zenuwwortels schenen zamen te hangen. Ook op de plaats, waar de zenuwwortels in den grijzen hoorn intreden, ontmoet men soms eene gangliëncel, die dan doorgaans grooter is dan in de randvezels, en meerdere stralen afgeeft, Fig. 8 bij *h*.

Deze randvezels omgeven echter den achtersten hoorn niet alleen van buiten, maar zij slaan zich voor een deel aan de basis van den hoorn naar binnen, *kk*, waar zij van wederzijden elkander in de groep gangliëncellen bij *d e* ontmoeten, en de tot hiertoe doorgedrongene zenuwwortels overkruisen. Niet alle vezels der mergstralen gaan in deze randvezels over: eenige treden, of met de zenuwwortels, of ook afzonderlijk in den grijzen hoorn in, en dringen door tot in het centrum der grijze stof; zie Fig. 8 *g, d, e*.

Eindelijk hangen met deze randvezels nog te zamen de vezels, die uit de grijze achterste commissuren *f* zich gedeeltelijk dwars naar het centrum *d e*, gedeeltelijk in deze randvezels bij *k* verspreiden.

Uit dit een en ander blijkt dus, dat aan de achterzijde het weefsel van het ruggemerg niet alleen meer zamengesteld is, maar ook dat hier twee soorten van zenuwwortels zijn, waarvan de eene terstond in de witte mergstralen naar boven klimmen, Fig. 7 *a b*, en zich naar de hersenen schijnen te begeven. Deze zijn onbetwistbare zenuwen van het gevoel; de andere wortels echter, Fig. 7 *c, d*, Fig. 8 *a, b, c*, treden dwars door de witte strengen naar den achtersten hoorn, welken zij doordringen, en gedeeltelijk zich met de randvezels, waardoor de hoorn omgeven en als ingesloten wordt, vermengen, en die in het centrum van de grijze stof tusschen den voorsten en achtersten hoorn zich in gangliëncellen, Fig. 8 *d e* schijnen te verliezen, waarin tevens zoowel het meerendeel der randvezelen als de achterste commissuur *f* zich vereenigen. Deze zenuwdraden kunnen wel naauwelijks iets anders zijn dan reflexzenuwen,

---

gevoel, dat is van overplanting van den indruk of van pijn op eene naast gelegene gevoelzenuw dienen, hetgeen hoogst waarschijnlijk hooger, waar de gevoelzenuwen eindigen, in de medulla oblongata plaats heeft. Het waarschijnlijkst komt mij voor, dat deze achterste stralen met de van achter indringende reflexzenuwen in verband staan; maar ik acht het best, mij hieromtrent van alle, misschien gewaagde, stellingen te onthouden, zoolang het verband dezer achterste stralen niet duidelijker bekend is.

die den prikkel overbrengen in het net van gangliëncellen, waarmede zij schijnen zamen te hangen, vanwaar de ontvangen indruk zich dan kan mededeelen aan de voorste cellengroepen, waaruit de zenuwwortels voor beweging ontspringen. Deze dwarse wortels, die tot dus verre voor gevoelwortels gehouden zijn, schijnen dus tot reflexwortels te behooren, die de gevoelzenuwen vergezellen tot aan en in het ruggemerg, waar zij uit elkander wijken; de eerste om naar boven zich naar de hersenen te begeven, de andere om zich met het algemeene middelpunt voor beweging, dat is met de eene of andere groep gangliëncellen in het begin der voorste hoorns te verbinden. De achterste hoorn zelf, die men dan ook wel, hoezeer oneigenlijk uit gelatineuse stof laat bestaan, wegens zijne groote doorschijnendheid, heeft op eene dwarse doorsnede een sierlijk meer of min vlammend aanzien, Fig. 8 *gg*, tegen de einden zeer doorschijnende, met een donkeren gevlamden rand, terwijl meerdere bundels als donkerder strepen dezen hoorn doorboren; zijn zamenstel verschilt dus zeer van dat des voorsten hoorns, die eenen meer gelijken tint heeft, en meer of min met gangliëncellen, en de vele zich kruisende draden, die hieruit ontspringen, bezet is.

Maakt men nu eene overlangsche snede door den achtersten hoorn, zoo ziet men duidelijk, dat deze zoogenaamde gelatineuse stof uit fijne, doorschijnende, longitudinale vezels bestaat, Fig. 9 *bb*, die meest een parallellen loop bezitten, en ongelijk veel dunner zijn dan de witte opklimmende mergdraden of gevoeldraden. (Zie Fig. 9 *c*.) Bij gelukkige sneedjes ziet men hiertusschen weder de dwarse fijne bundels der reflexzenuwen verloopen, Fig. 9 *aaa*, doch waarvan men om hun bogtigen of kronkelenden loop gewoonlijk slechts afgesneden brokstukken vervolgen kan, die zich altijd als afgezonderde bundels, nooit als geheele vlakten van dwarse vezels vertoonen, zooals deze ook door Schilling zijn afgebeeld *. Somwijlen schenen deze dwarse bundels zich ook in de longitudinale om te buigen, hetgeen ook Schilling waarnam. Nu en dan, schoon vrij zeldzaam, vindt men ook midden in deze gelatineuse stof of achtersten hoorn duidelijke gangliëncellen, die ik zoowel bij dwarse als bij longitudinale secties heb aangetroffen, zie Fig. 10, in eene longitudinale sectie. Deze zijn buitengemeen klein en vormen kleine omschrevene groepen; op andere plaatsen ziet men soms midden in den achtersten hoorn grootere gangliëncellen afzonderlijk gelegen.

---

* Tab. 2, Fig. 1.

De beteekenis en physiologische verklaring dezer longitudinale vezels in den achtersten hoorn, die bijna geheel, althans voor verre het grootste gedeelte uit deze vezels bestaat, is niet gemakkelijk. Tot gevoeldraden, die meer naar binnen gelegen, zich naar de hersenen begeven, kunnen zij moeijelijk gebragt worden; niet alleen, omdat zij veel fijner zijn dan de witte strengen, Fig. 9 *c*, maar, en wel vooral, om de verschillende grootte dezer achterste hoorns zelve; immers zijn deze in de lenden-aanzwelling, zoowel als in de cervicaal-aanzwelling het grootst, en overtreffen in breedte en uitgebreidheid zeer verre de hoorns in het ruggegedeelte *. Deze fijne vezels loopen dus niet onafgebroken door naar boven, daar in dit geval de achterste hoorns in het ruggedeelte niet dunner dan in de lendenen konden zijn.

Indien wij echter letten op den oorsprong der beweegzenuwen uit groepen van gangliëncellen, en dat deze groepen onderling met elkander voor verschillende spieren in verband staan, ter coördinatie der beweging; dat verder bij een eigen geïrriteerden toestand van het ruggemerg één prikkel zeer vele of zelfs alle zenuwen van het ruggemerg tot convulsive werkingen kan opwekken, en zoo de reflexbewegingen zich tot verafgelegene gedeelten kan doen uitstrekken, dan is het meer dan waarschijnlijk, dat deze longitudinale, fijne doorschijnende vezels, waaruit de achterste hoorns bestaan, communicatie-vezelen zijn, dat is, die de op verschillende hoogte van het ruggemerg gelegene gangliëngroepen onderling verbinden, en zoo vooral dienen voor de coördinatie der bewegingen †. Dit denkbeeld wordt nog zeer bevestigd, doordien juist even zoo als de voorste hoorns voor beweging veel breeder zijn en rijker aan gangliëngroepen in de lenden- en het halsgedeelte, waaruit de zenuwen voor de zamengestelde bewegingen der extremiteiten ontspringen, zoo ook de achterste hoorns daar breeder zijn, om die verschillende groepen onderling te verbinden. In den rug echter dienen de zenuwen meer voor eenvoudige bewegingen, namelijk van de tusschenribbige spieren en rugspieren, waar de verschillende combinatiën veel geringer zijn, dan tusschen de zoo menigvuldige spieren der extremiteiten; maar hier zijn ook beide horens veel geringer in omvang.

---

* Zie Stilling, *Med. Oblongat.* Pl. I, Fig. 1 vergeleken met Pl. II, Fig. 2.

† Het komt mij waarschijnlijk voor, dat eenige der dwarse bundels of draden der reflexzenuwen hierin overgaan, terwijl andere dezer draden zich op de voorgestelde wijze met de centrale cellengroep schijnen te vereenigen, waardoor dus het verband tusschen de reflexzenuwen en deze longitudinale vezels, en daardoor de veelzijdigheid van reflexie schijnt bevorderd te worden.

Vollediger kunnen wij dit echter eerst overzien, wanneer wij ook de commissuren van het ruggemerg hebben beschouwd, waartoe wij thans overgaan.

Over deze commissuren is evenzeer verschil van gevoelen als over alle overige gedeelten van het ruggemerg; KÖLLIKER laat ten deele de zenuwwortels in de commissuren overgaan, hetgeen reeds STILLING leerde; ten deele meent hij, dat de voorste commissuur eene overkruising is van de voorste witte ruggemergstrengen *. SCHILLING merkt echter teregt op, dat de beide commissuren uit grijze vezelen bestaan, geenszins uit witte mergdraden; zoo ook ontkent BLATTMAN, dat de longitudinale witte vezelen direct in de commissuren overgaan; slechts vermengen deze zich onderling, volgens BLATTMAN, zonder eenige directe verbinding aan te gaan †.

Het uitvoerigst en best heeft SCHILLING het maaksel en verband der commissuren uiteengezet, en tevens de verschillende gevoelens der Schrijvers hierover beoordeeld, waarop wij nader verwijzen §.

De voorste commissuur onderscheidt zich van de achterste zeer bijzonder, doordien in de voorste de vezelen zich kruisen, zooals reeds door STILLING is afgebeeld, maar waarvan vooral SCHILLING eene zeer fraaije afbeelding geeft **. Wij hebben deze kruising bestendig waargenomen, en hiervan eene afbeelding uit het lendengedeelte der koe gegeven ††. De vezelen slaan zich na de kruising om, loopen ten deele als menigvuldig zich door elkander vlechtende vezels §§ langs de binnenzijde der voorste fissuur in de witte strengen ***, ten deele gaan zij in den binnenrand van den voorsten grijzen hoorn over, waar zij zich vermengen met de ring- of randvezelen, die uit de menigvuldige stralen voortkomen †††, en van uit de grijze stof, zooals wij boven gezien hebben, in de witte mergstrengen zich verdeelen, en de longitudinale vezels opnemen. Zij gaan, zooals reeds teregt door SCHILLING is opge-

---

* *Mikrosk. Anat.* l. c. pag. 412.

† BLATTMAN, l. c. pag. 12, 22.

§ l. c. pag. 44 sqq.

** l. c. Tab. I.

†† Fig. 11 *b*, *c*, *d*.

§§ Fig. 11 *d*.

*** Fig. 12 bij *f*.

††† Fig. 11 *l*, Fig. 12 *f*.

merkt *, geenszins in de wortels der voorste zenuwen direct over, hetgeen ik eveneens nimmer onder zeer vele fraaije voorwerpen, waar ik de wortelvezels der zenuwen zeer ver kon vervolgen, heb waargenomen; het zijn vezelen, die als dwarse commissuren moeten beschouwd worden. De verbinding namelijk van deze vezelen met die, welke uit de stralen langs den rand van den hoorn verloopen, en de menigvuldige stralen, die zich uit de commissuur langs de voorste fissuur direct in de witte strengen verspreiden †, wijzen wel op eene soortgelijke verbinding en werking, dat is, zij nemen waarschijnlijk longitudinale vezels op, waarvan zij de werking aan de tegenovergestelde zijde van het ruggemerg overbrengen, en hier gaan zij over in eene groep gangliëncellen §, die door SCHILLING niet is erkend, maar die wij boven hebben beschreven, welke groep gangliëncellen weder met de andere groepen, in den voorsten hoorn aanwezig, meer of min in verband schijnt te staan. Door deze voorste commissuur wordt dus waarschijnlijk het verband daargesteld tusschen de bewegingen der regter- en linkerzijde, die, zoo als bekend is, zoo veel invloed op elkander uitoefenen, b. v. bij het gaan, het meer of min verschil of overeenkomst tusschen de bewegingen der beide armen of handen, waardoor het ook b. v. voor den beginnenden pianospeler zoo moeijelijk wordt de vingers der beide handen ongelijk te bewegen; daar door de beweging der vingeren van de eene, ook de vingeren der andere hand eene neiging verkrijgen dezelfde beweging te maken. Vanhier ook, dat STILLING bij eene verdeeling van het ruggemerg in de lengte volgens de fissuren in twee deelen wel willekeurige bewegingen in een kikvorsch ontstaan zag, maar de harmonie tusschen de bewegingen der extremiteiten was verbroken **.

Grooter verschil is er, vooral wat de breedte betreft, tusschen de achterste commissuren; in het onderste lendengedeelte is deze commissuur zeer breed, en bevat dus vele vezelen, hooger in den rug is deze achterste commissuur veel smaller, in het bovenste cervicaal-gedeelte wordt deze commissuur weder breeder ††.

---

* l. c. pag. 50.

† Fig. 12 *f*.

§ Fig. 11 *f*, Fig. 12 *l*.

** *Untersuchungen ueber die Functionen des Rückenmarks*, pag. 82.

†† Zie onze Fig. 11 en 12 uit de lenden; zoo ook CLARKE, *Phil. Trans.* l. c. Tab. XX, Fig. 1—5 uit het onderste gedeelte der lenden, en Tab. XXI—XXV. Zoo ook STILLING, *Med. oblong.* Tab. II en III.

De vezelen dezer achterste dwarse commissuur loopen parallel zonder overkruising; die, welke het naast bij de centrale opening zijn, gaan in eene gangliëngroep over *, en deze vezelen zijn mij in meerdere voorwerpen van eene eenigzins ligtere kleur voorgekomen, zoo als in Fig. 11 en 12 is uitgedrukt. De andere loopen ten deele dwars van het centrum van de eene zijde naar dat der overgestelde, waar zij in de centrale groep van gangliëncellen schijnen te eindigen †. Hier, als in een meer algemeen middelpunt vereenigen zich de reflexdraden, de randvezels van den achtersten hoorn en de achterste commissuur, zoo als wij boven hebben gezien; de achterste vezelen van deze commissuur gaan direct in de randvezels over, die uit de binnenste stralen ontspringen §, waardoor hier iets soortgelijks plaats heeft, als wij bij de voorste commissuur hebben waargenomen, zonder dat echter eenige kruising aanwezig is.

De vezelen dus der achterste commissuur gaan evenmin eene directe verbinding aan met de eigenlijke gevoelvezelen, die zelfs niet in den achtersten hoorn indringen, als met de voorste wortels; ook met de vezelen der reflexzenuwen, die, zoo als wij gezien hebben, door den achtersten hoorn tot in het midden der grijze stof dringen, hangen de vezelen der achterste commissuur waarschijnlijk niet direct te zamen. Zij schijnen hier in de verschillende gangliëncellen uit te loopen, die men algemeen in het ruggemerg beschouwen kan als punten van vereeniging van ongelijk werkende vezelen, als middelpunten, waar zenuwwerking wordt opgewekt, die dan van uit deze cellen in verbindingsdraden en zenuwvezelen uitstraalt. Immers hebben wij in het midden der grijze stof aan de basis van den achtersten hoorn eene celgroep gezien (Fig. 8 *d, e*), die een algemeen punt voor reflex schijnt te zijn; in deze celgroep stralen namelijk de reflexzenuwen uit; hierin convergeren de circulaire randvezelen, die den achtersten hoorn omgeven, Fig. 8 *h,h,h,* en voor het grootste deel uit de buitenstralen *l* schijnen te ontspringen, en eindelijk loopen hierin ook de vezelen der achterste commissuur uit *f,e,d.* Bedenken wij nu, dat de achterste hoorn zelf uit longitudinale fijne vezels bestaat, die waarschijnlijk dienen om verschillende groepen cellen te vereenigen, met welke fijne vezels deze middelste gangliëngroep, *d,e,* tevens in aanraking is, dan kan men oordeelen welk een gewigtig vereenigingspunt door deze cellen wordt

---

* Fig. 11 *g*.

† Fig. 8 *f e d*. Fig. 12 *k*.

§ Fig. 8 *f k*.

daargesteld, die op hunne beurt weder schijnen zamen te hangen met de groepen cellen in den voorsten hoorn voor beweging, Fig. 12 *k,l*.

Tusschen deze beide commissuren is het centraal kanaal gelegen, een vervolg van de vierde hersenholte, hetwelk van binnen met epithelialcellen bekleed is *. Kölliker zegt, dat het in den mensch niet als een hol kanaal voorkomt, zooals in de vrucht, maar dat die plaats door eene graauwe kern wordt ingenomen, die uit een centrale, vooral door zenuwcellen gevormde cylindrische of afgeplatte streep van ligt geelachtige kleur gevormd wordt †. Schilling betuigt somwijlen duidelijk in den mensch een kanaal te hebben aangetroffen §, en ik vond dit kanaal zelfs in het ruggemerg van eene 70-jarige vrouw. Ik vermoed dat Kölliker door het ruggemerg in acidum chromicum te verharden, is misleid geworden; somwijlen namelijk heb ik ook in schapen en zelfs koeijen eenige gestolde stof, waarschijnlijk albumen in het kanaal aangetroffen, en vermoed, dat door de sterke inwerking van acidum chromicum dit kanaal meermalen zich of geheel te zamentrekt, of dat eenige vochtige inhoud zoo vast is gestold, dat het niet meer te herkennen was. In dunne plaatjes, na eenige verharding in spiritus en later geplaatst in chlorcalcium, heb ik steeds een kanaal hier aangetroffen, hetgeen overigens bij koeijen wijder en veel duidelijker is.

Zien wij thans op het verhandelde terug, dan meenen wij als slotsom van onze onderzoekingen te mogen vaststellen:

1) De gangliëncellen, vooral in den voorsten hoorn, hangen onderling door meer of min vertakte communicatievezels te zamen, en vormen zoo onderling meerder of minder gescheiden groepen.

2) Uit de gangliëncellen, vooral in het midden en voorste gedeelte van den voorsten hoorn, ontspringen de beweegzenuwen, die zich aan den rand der grijze stof tot een, of gemeenlijk twee of meerdere zenuwwortels naast elkander vereenigen, en nu volgens eene dwarse rigting het ruggemerg verlaten, om de wortels der beweegzenuwen zamen te stellen.

3) Langs den buitenrand des voorsten hoorns verloopen randvezels of dra-

* Fig. 11 *a*, Fig. 12.

† *Mikrosk. Anat.* l. c. pag. 411.

§ l. c. pag. 42.

den, die uit de stralen, welke tusschen de longitudinale strengen zich verdeelen, hunnen oorsprong nemen en met de gangliëncellen zamenhangen, die in grooten getale langs den buitenrand van den voorsten hoorn geplaatst zijn Deze cellen hangen weder met andere dieper gelegene te zamen, en zoo eindelijk met de groep gangliëncellen, waaruit de beweegzenuw zijnen oorsprong neemt.

4) De voorste longitudinale strengen bestaan uit witte, meest parallel loopende mergvezelen, die in de even genoemde dwarse stralen overgaan, en zoo den indruk van den wil op de gangliëncellen in de grijze stof overbrengen; de longitudinale vezelen, welke het naast aan den grijzen hoorn gelegen zijn, buigen zich direct om, ten einde in eene gangliëncel over te gaan.

5) De achterste zenuwwortels bevatten twee soorten van zenuwdraden: die voor het eigenlijk gevoel en die voor reflex. Vanhier zijn de achterste zenuwwortels ook veel dikker dan de voorste.

6) De zenuwwortels voor gevoel gaan terstond na hunne intrede in het ruggemerg naar boven langs de achterste strengen, om zich naar de hersenen of de plaats van perceptie te begeven. Zij dringen niet in de grijze stof.

7) De andere draden voor reflex dringen dwars naar den achtersten hoorn, en maken tusschen de longitudinale vezels of strengen meerdere vlechten; ten deele dringen zij door de zoogenoemde gelatineuse stof van den achtersten hoorn naar het midden der grijze stof, waar zij in gangliëngroepen schijnen over te gaan; misschien geven zij ook eenige draden af aan de randvezels, die overal den grijzen achtersten hoorn als een band omringen.

8) Deze randvezels ontstaan voor een groot deel uit de zenuwstralen, die uit den achtersten hoorn in het merg zich verspreiden; zij omringen den hoorn, en aan zijne basis krommen zij zich van weêrszijden om naar het midden tot de groep gangliëncellen, waarin ook de reflexzenuwen eindigen. Tusschen deze randvezelen zijn meerdere meest langwerpige gangliëncellen ingestrooid, eenige gangliëncellen worden ook in de gelatineuse stof, vooral nader bij het midden, aangetroffen.

9) De achterste hoorns der grijze stof bestaan vooral uit zeer fijne longitudinale vezelen. Daar nu deze achterste hoorns in de cervicaal- en lendenaanzwelling ten minste 5 à 6 maal dikker zijn, dan in het dorsaalgedeelte van het ruggemerg, volgt dat deze fijne longitudinale vezels hier in een veel grooter getal aanwezig zijn, en dus niet door het geheele ruggemerg heen loopen, maar in de cervicaal- en lenden-aanzwelling, waar de meeste reflexwerkingen en bewegingen opgewekt en verbonden worden, voor het grootste

gedeelte eindigen; zij schijnen dus door hunne longitudinale rigting, meerdere boven elkander geplaatste celgroepen meer of min te vereenigen, en dus longitudinale communicatie-draden te vormen.

10) De achterste commissuur, uit grijze vezelen bestaande, gaat ten deele in naderbij gelegene gangliëncellen over, ten deele in de cellen, die in het midden der grijze stof aanwezig zijn, ten deele hangen eenige vezels met de randvezels om den achtersten hoorn te zamen.

11) De voorste commissuur maakt eene overkruising; zijne vezelen slaan zich naar voren, om ten deele direct als stralen tusschen de binnenste voorste longitudinaal-strengen te eindigen; ten deele gaan zij naar den binnenrand van den voorsten hoorn, waar zij in de randvezelen overgaan, die uit de stralen, zooals wij boven gezien hebben, hunnen oorsprong nemen.

12) De vezelen der voorste zoowel als der achterste commissuren hangen niet direct met de zenuwwortels te zamen, met die der voorste echter waarschijnlijk door middel der vereenigingsdraden tusschen de verschillende gangliëngroepen, en beide commissuren bestaan uit grijze vezelen.

13) In het ruggemerg is bestendig een kanaal aanwezig van binnen met epithelialcellen bekleed, hetwelk soms eenig albumineus vocht schijnt te bevatten, en in den mensch enger schijnt dan in de meeste dieren.

Nadat wij, zoo naauwkeurig ons mogelijk was, de voornaamste punten omtrent het weefsel en het onderling verband der deelen, waaruit het ruggemerg is te zamen gesteld, hebben getracht uiteen te zetten en tot een geheel te brengen, komt het ons niet ondienstig voor, het aangevoerde nader door eenige physiologische gronden te bevestigen, en te gelijk de wijze van werking in het ruggemerg hieruit af te leiden en te verklaren.

1) Dat de beweegzenuwen in het ruggemerg en wel uit de multipolaire gangliëncellen van de voorste grijze hoorns hunnen oorsprong nemen, hebben wij door overtuigende waarnemingen bevestigd gevonden; dit was van te meer gewigt, daar de voornaamste waarnemingen van Wagner, door Ecker afgebeeld, uit de elektrieke rog waren genomen, en hoe waarschijnlijk ook hiervan de toepassing op het ruggemerg zelf konde gemaakt worden, liet dit nog misschien eenigen twijfel over. De afbeelding van Schilling is evenmin volkomen bevredigend, ofschoon hij even als Gratiolet betuigt, den zamenhang met de beweegzenuwen overtuigend gezien te hebben. Dat echter het

denkbeeld van Kölliker, die den oorsprong der beweegzenuwen uit de hersenen wil afleiden, aan buitengewone zwarigheden onderhevig is, die reeds op zich zelve dit zijn gevoelen onwaarschijnlijk doen zijn, is niet moeijelijk aan te toonen.

Letten wij op eene spier, b. v. den biceps, of welke andere spier van eenigen omvang, en onderzoeken wij de zenuwen, die zich als beweegzenuwen in deze spier verliezen, dan zal eenig mikroskopisch onderzoek ons gemakkelijk bewijzen, dat de takken der zoogenoemden perforans Casserii, die zich in den biceps begeven, nog vele honderde, ja duizende primitiefdraden bevatten; uit dezelfde zenuw ontvangt ook de brachialis internus zijne beweegzenuwen, waardoor dit getal nog aanzienlijk vermeerderd wordt. Het eigendommelijke van deze spieren is echter, dat wij geen van beiden afzonderlijk kunnen bewegen; zij vormen een stelsel, hoedanige er nog veel uitgebreidere in het ligchaam zijn: denken wij slechts aan den rectus, cruraeus en vasti. Wanneer wij deze spieren in werking brengen, worden alle vezels, tot dit stelsel behoorende, gelijkmatig gespannen; wij zijn niet in staat den biceps te spannen en den brachialis internus gerelaxeerd te laten, of omgekeerd; maar hetzij met eene geringe kracht, hetzij bij eene hevige inspanning wordt de werking van onzen wil gelijkmatig aan alle spiervezels medegedeeld, hetgeen volstrekt noodig was, zouden deze spieren ons de dienst doen, waarvoor zij vatbaar zijn; eene gedeeltelijke zamentrekking van eenige spierbundels was voor ons gebruik volstrekt nutteloos, omdat in deze spieren een gedeelte geene andere werking zoude kunnen doen dan de geheele spier, namelijk den voorarm te buigen; de indruk van onzen wil moet dus gelijkmatig over alle spierzenuwen verdeeld worden, die in den brachialis internus en biceps treden. Begeven zich nu alle deze spierzenuwen langs het ruggemerg tot in de hersenen, en wel tot het punt, waar onze wil werkt, dan moet onze wil altijd gelijkmatig op alle deze duizende zenuwvezels werken; maar dan bestaat er ook geene verklaring, waarom onze wil niet sterker op eenige zenuwvezels dan op andere zoude kunnen inwerken, daar zij wel naar willekeur op verschillende spierzenuwen werken kan, en wij zouden het vermogen moeten bezitten, b. v. de eene helft van den biceps, of ook den biceps alleen in werking te brengen en den brachialis internus gerelaxeerd te laten.

De Natuur heeft dit echter naar onze meening veel eenvoudiger en zekerder verrigt. Alle deze spierzenuwen, namelijk voor den biceps en brachialis internus, ontspringen uit eene onderling zamenhangende groep van multipolaire

gangliëncellen. Ontvangt nu deze groep eenen indruk of prikkel van onzen wil, door middel van een of eenige geleidraden, die uit de hersenen afkomstig zijn, zoo schijnt zich deze indruk op alle multipolaire cellen van deze groep, door middel der vele communicatiedraden, waardoor zij onderling zamenhangen, gelijkelijk te verbreiden en tot krachtsontwikkeling op te wekken, waarvan het gevolg is, dat alle zenuwvezels uit deze groep afkomstig, met eene gelijkmatige kracht worden opgewekt, die zich aan alle spiervezels gelijkelijk mededeelt, welke zenuwen uit deze groep ontvangen, waarvan dan eene gelijkmatige en tevens gelijktijdige werking en zamentrekking van alle spiervezels van den biceps en brachialis internus het gevolg moet zijn, waarom wij dan ook niet in staat zijn een gedeelte van deze spieren gedurende hunne zamentrekking werkeloos te laten. Wij kunnen dus eene dergelijke groep van gangliëncellen als eene batterij Leidsche flesschen beschouwen, die onderling verbonden zijn; de electrieke kracht verdeelt zich gelijkmatig over alle zamen vereenigde flesschen, en alle worden te gelijk gelijkmatig ontladen, zooals er ook slechts een conductor noodig is om alle de flesschen gelijkelijk te laden *.

2) Volgens deze voorstelling wordt niet alleen verklaard de gelijkmatige en gelijktijdige werking van alle vezels eener spier, maar hierdoor wordt ook het zamenstel van het ruggemerg duidelijker en verstaanbaar. Indien namelijk een prikkel, aan eene dergelijke groep gangliëncellen medegedeeld, zich gelijkmatig over de geheele groep verspreidt, kan het getal medullaire draden, die den indruk van onzen wil naar die groep overbrengen, zeer gering zijn. Theoretisch zoude men zich zelfs slechts éénen geleiddraad kunnen denken; wij gelooven echter niet, dat de natuur zulk eene belangrijke werking, als die eener aanzienlijke spier, of zelfs van een stelsel spieren, aan één enkelen zoo teederen zenuwdraad zal hebben toevertrouwd; maar stellig mogen wij ons voorstellen, dat het getal geleiddraden, die uit de hersenen ontspringen en langs de voorste en zijdelingste strengen naar beneden loopen, om zich met ééne groep gangliëncellen te vereenigen, niet groot behoeft te zijn; dit getal kan dus hoogst

* Hoezeer het ook anatomisch niet kan worden aangetoond, daar men niet alle de menigvuldige zich doorkruisende draden in de voorste hoorns der grijze stof vervolgen kan, moet men toch besluiten, dat dergelijke groepen tot eene zekere mate van de aangrenzende geïsoleerd zijn, daar anders de afzonderlijke beweging van eene spier onmogelijk zoude worden; om deze reden kunnen wij ons de gangliëncellen niet voorstellen als zamenhangende kolommen uitmakende, die langs de geheele lengte van het ruggemerg loopen; maar zij moeten in zoo vele verschillende groepen zijn afgedeeld, als er afzonderlijke spierstelsels of ook spierbewegingen in het ligchaam voorkomen.

gering zijn in vergelijking met het getal zenuwdraden, hetgeen uit de groep cellen ontspringt en zich als zenuw in de spier verdeelt; en hieruit verklaart zich van zelve de onevenredigheid tusschen de massa der voorste en voorzijdelingsche strengen, in tegenoverstelling van de massa van alle beweegwortels te zamen, welke onevenredigheid door de berekeningen van Kölliker niet juist wordt verklaard. Denken wij ons slechts, zoo als reeds Todd en Bowman hebben opgemerkt *, dat in de vezels, die de voorste pyramiden zamenstellen en door den pons Varolii naar de crura cerebri gaan, alle zenuwdraden zouden moeten bevat zijn, die de spierbundels en spieren van het geheele ligchaam in werking brengen, dan valt hier eene onevenredigheid in het oog, die zich door de verschillende fijnheid van zenuwvezels niet laat verklaren, daar dit verschil op verre na zoo groot niet is.

Hieruit volgt dus, dat het getal medullaire longitudinale vezels, die zich als geleiders van den indruk van onzen wil van de hersenen naar de verschillende groepen gangliëncellen begeven, betrekkelijk gering kan zijn. Zij moeten namelijk in evenredigheid zijn tot het verschillend aantal gangliëngroepen in de voorste hoorns aanwezig, en dit getal verschillende gangliëngroepen moet in verband staan tot de verschillende afzonderlijke bewegingen, die wij of met verschillende spieren, of zelfs somwijlen met eenige deelen van eene spier, b. v. verschillende afdeelingen van den pectoralis major kunnen in het werk stellen. Zoo zal er b. v. naar onze voorstelling ééne aanzienlijke groep gangliëncellen in het lendengedeelte van het ruggemerg aanwezig zijn voor den rectus, de vasti en cruraeus, ééne groep voor den gastrocnemius en soleus enz., en dus zal het aantal gangliëngroepen naauwelijks veel meer kunnen bedragen dan het getal spieren, hetwelk in het ligchaam aanwezig is. Wanneer wij dus op dwarse doorsneden de dikte der voorzijdelingsche strengen van het ruggemerg op verschillende hoogten vergelijken, dan zal door het gering getal geleiddraden, hetwelk van iedere groep naar boven stijgt, de dikte van de voorzijdelingsche strengen naar boven slechts weinig toenemen.

Aan de achterzijde hebben wij echter gezien, dat de eigenlijke gevoeldraden, na hunne intrede in het ruggemerg, terstond zich naar boven ombuigen om een deel der achterste strengen uit te maken; de achterste en achterstzijdelingsche strengen moeten dus zoo vele zenuwdraden bevatten, als er zenuwen

---

† *Phys. Anat.* 2 part. pag. 329 en *Cyclop. of Anat. and Phys.* tom. III, pag. 722 D.

voor gevoel zijn. In de opklimmende rij van dwarse doorsneden zullen dus de achterste en achterst zijdelingsche strengen door de telkens bijkomende gevoelzenuwen veel dikker naar boven moeten worden, dan dit met de voorste het geval is.

Vergelijken wij nu uit dit oogpunt de platen van ARNOLD *, die zeer naauwkeurig zijn, dan zien wij, dat in de bovenste afdeelingen van het ruggemerg de achterst zijdelingsche strengen zeer in massa zijn toegenomen, terwijl die aan de voorzijdelingsche strengen slechts zeer weinig in dikte vermeerderd zijn, zoodat de structuur van het ruggemerg geheel met onze voorstelling overeenkomt.

3) Wij hebben gemeend te moeten vaststellen, dat voor iedere bijzondere beweging eene eigene groep gangliëncellen moet aanwezig zijn, waaruit al die zenuwdraden ontspringen, die naar eene spier of een altijd gelijktijdig werkend stelsel spieren gaan. Hoe grooter dus het aantal verschillend werkende spieren is, des te menigvuldiger moeten ook in de voorste hoorns van het ruggemerg de verschillende gangliëngróepen zijn, om deze spieren te vertegenwoordigen en hunne verschillende werkingen voort te brengen. Het gevolg hiervan zal zijn, dat op die plaatsen de voorste hoorns der grijze stof breeder en grooter moeten wezen en een grooter getal multipolaire cellen bevatten, dan waar slechts een gering aantal verschillende spierwerkingen van uit het ruggemerg bestuurd wordt, of waar het getal spieren kleiner is. In de lenden-aanzwelling waaruit de zenuwen voor de beenen, en in de cervicaal-aanzwelling waaruit de zenuwen voor de armen ontspringen, zullen dus de voorste hoorns breeder en massiver moeten zijn dan in het ruggedeelte, waar de werking der intercostales en rugspieren op verre na niet zoo vele verschillende spieren bevatten noch verschillende bewegingen plaats hebben, als in de extremiteiten. Vergelijken wij weder uit dit oogpunt de afbeeldingen van ARNOLD, dan is het in het oog vallend, dat juist in de lenden-aanzwelling † en in het halsgedeelte § de voorste hoorns zoo breed

* *Tabul. anat. Tab.* 1, Tab. II. Men zie b. v. Fig. 26 tot 23 hetwelk de lenden-aanzwelling bevat, met Fig. 20 tot 16 of het halsgedeelte van het ruggemerg, en het onderscheid zal ieder in het oog vallen. — Ook LONGET heeft deze figuren, zonder echter ARNOLD te noemen, vrij getrouw gecopiëerd. *Anat. et Physiol. du Système nerveux*, Tom. 1, pl. 2. — Zie ook STILLING, *Med. oblongat.* Tab. I, Fig. 1, vergeleken met Tab. II, Fig. 3 en 4.

† Pl. II van Fig. 26 tot 23.

§ l. c. van 20 tot 16.

zijn, terwijl deze integendeel in het rugge-gedeelte * in het oog loopend smal en klein zijn †. Bij mikroskopisch onderzoek is mij tevens gebleken, dat in het rugge-gedeelte het aantal gangliëncellen veel geringer is, of zooals Clarke teregt heeft opgemerkt, dat het getal gangliëncellen in eene directe verhouding staat tot de grootte van de beweegzenuwen, die zich uit het ruggemerg begeven §.

Onze voorstelling van het nut en de wijze van verbinding der gangliëncellen tot groepen, verklaart dus tevens de verschillende dikte van de voorste hoorns en het ruggemerg voor de verschillende plaatsen en spierzenuwen, die het ruggemerg verlaten.

4) Vergelijken wij het ruggemerg bij verschillende dieren, dan vinden wij ook hierin eene bevestiging van het gezegde. Hoezeer het mij aan tijd en gelegenheid ontbroken heeft om een mikroskopisch onderzoek van het ruggemerg over een groot aantal dieren uit te strekken, eene onderneming, die inderdaad hoogst belangrijke resultaten zoude kunnen opleveren, heb ik echter getracht bij eenige dieren het ruggemerg nader te onderzoeken, waar mij toescheen dat een grooter verschil plaats had. Bijzonder trok hierin de dunheid van het ruggemerg bij eenige visschen mijne aandacht. In de gelegenheid zijnde eenen Steur (Acipenser sturio) van ongeveer 120 pond te ontleden, was ik hoogst verwonderd een ruggemerg aan te treffen, hetgeen naauwelijks dikker was dan dat van eenen Kikvorsch, terwijl zijne spieren verre de zwaarste deelen van het ligchaam uitmaken, en zelfs de dikte der spiermassa in dezen visch, die der zwaarste spieren van een mensch verre over-

---

* l. c. Fig. 22 en 21. Zie ook Stilling, *Med. obl.* Tab. I, Fig. 1 en Tab. II, Fig. 3 tegenover Tab. II, Fig. 2 en 4.

† Hiermede overeenkomstig zijn dan ook de dwarse stralen uit de voorste hoorns, in het witte merg, menigvuldiger in de lenden- en cervicaal-aanzwelling dan in het rugge-gedeelte; daar meerdere groepen gangliëncellen ook meerdere verbindingen met de voorzijdelingsche strengen als dragers van den indruk van den wil vorderen.

§ *Phil. Transact.* l. c. pag. 614. — Tevens valt het ligt te begrijpen, waarom, zooals reeds Gratiolet opmerkt (zie boven pag. 22 Sq.) de gangliëncellen in grootere dieren grooter en menigvuldiger in de voorste hoorns zijn. Indien immers de bijzondere zenuwdraden voor de spieren uit deze gangliëngroepen hunnen oorsprong nemen, dan moeten, daar zwaardere spieren meerdere zenuwdraden bekomen, ook de gangliëncellen, waaruit zij ontspringen, meerdere draden afgeven, en dus grooter en duidelijker groepen vormen dan in kleine dieren, waar de zenuwen dunner en dus ook de gangliëncellen kleiner zijn en minder draden afgeven.

treft *. Ook de wortels der zenuwen, die zich uit het ruggemerg begeven, zijn in dezen visch van eene buitengewone dunheid, ongeveer als een varkensborstel. Zeer was ik verwonderd, in dit ruggemerg naauwelijks eenige grijze stof, en niet dan na lang zoeken eenige gangliëncellen aan te treffen; de zenuwvezels in het ruggemerg waren echter niet zeer fijn, zelfs veel dikker dan bij den mensch.

Deze onevenredigheid tusschen de dikte van het ruggemerg, hetwelk nagenoeg gelijk stond aan het ruggemerg van een kikvorsch, bij de buitengemeen zware spieren, schijnt te bewijzen, dat tusschen de dikte van het ruggemerg en de spierkracht van een dier geene verhouding bestaat, zooals ik zoude vermoed hebben. Zeer bevreemde mij echter het gering getal van gangliëncellen, en de geringe, naauwelijks te onderscheidene hoeveelheid van grijze stof, in het ruggemerg van dit dier aanwezig. Letten wij echter op de levenswijze en de bewegingen van dit dier, dan wordt deze bijzonderheid terstond opgehelderd. Immers maakt dit dier slechts zeer weinig verschillende bewegingen; het slaat met zijnen staart zoo wel als met zijne vinnen heen en weder, het kromt zijn ligchaam naar de eene of andere zijde, maar de menigvuldige spiercombinatiën van de extremiteiten der hoogere dieren en bijzonder van den mensch, waar te gelijk uitstrekkers en buigers werkzaam zijn of zich afwisselen, komen hier niet voor. Het dier behoeft dus niet vele groepen gangliëncellen en hunne verschillende verbindingen tot gecoördineerde bewegingen, terwijl bovendien door de aanzienlijke lengte van het ruggemerg in deze visschen, de cellen zeer in de lengteas schijnen geschaard te zijn, zoodat men menigmaal bij eene dwarse doorsnede geene gangliëncel vinden kan.

Vergelijken wij hiermede het ruggemerg van den Kikvorsch, dan verschilt dit in dikte naauwelijks van het ruggemerg van eenen Steur van 120 pond en meer. De grijze stof met hare vier hoorns is hier duidelijk aanwezig, waarin vele, hoezeer ook kleine gangliëncellen zich bevinden; maar hier ont-

* Dezelfde dunheid bezit het ruggemerg bij de haai, de bot, de snoek en andere visschen. Wegens de weekheid en het zeer overvloedige vet is het zeer moeijelijk de fijnere structuur van het ruggemerg bij de visschen te onderzoeken; ik vond vele dikkere zenuwvezels met eene duidelijke cylinderas van 0,005 mm. en dunnere van 0,0013 mm. dikte. De gangliëncellen in den Steur waren zeer doorschijnend, met intermediaire draden zamenhangende; bij den steur van eene breedte van 0,0204 en 0,0255 mm., bij eene lengte van 0,0080 mm. Ook bij de bot heb ik deze gangliëncellen in het ruggemerg aangetroffen.

moeten wij in den sprong van het dier ook weder een veel zamengestelder spel van spierwerking, daar vele verschillende spieren in werking treden om dezen sprong te bewerkstelligen.

Wij zien dus, dat ook bij dieren de voorstelling bevestigd wordt, dat, hoe zamengestelder de bewegingen zijn, ook des te meer gangliëncellen en hunne verschillende groepen aanwezig zijn, en des te zwaarder de voorste hoorns en de massa grijze stof in het ruggemerg zich vertoonen.

5) Wij hebben boven aangetoond, dat de gevoelwortels zich verdeelen, na hunne intrede in het ruggemerg, in opklimmende bundels, die met de longitudinale strengen naar boven gaan, en in dwarse, die zich, in verschillende bundels verdeelende, naar den achtersten hoorn der grijze stof begeven, en na deze doorgedrongen te zijn, zich ailengs voor een groot deel in de groep gangliëncellen schijnen te verliezen, die in het midden der grijze stof tusschen de hoorns geplaatst is, en in deze laatste hebben wij inderdaad reflexzenuwen erkend. Wij kunnen echter niet geheel met MARSHALL HALL instemmen, die excito-motorische zenuwen aanneemt, dat is, bijzondere zenuwen, die ook de beweging zouden volbrengen, door reflexie veroorzaakt. Dit is eene hypothese, die op geenen vasten grond steunt; het is genoeg, dat de wortels der beweegzenuwen van de groep gangliëncellen de opwekking tot werking ontvangen, hetzij die door den wil van de voorzijde, hetzij door de reflexbewegingen van de achterzijde wordt medegedeeld.

Volgens dit denkbeeld kunnen wij dus ons de groepen van gangliëncellen voorstellen als eene batterij met twee polen, of liever, die van twee zijden kan geladen worden: de eene pool hangt door middel der zijdelingsche stralen met de geleiddraden van den indruk van onzen wil te zamen, de andere pool door middel van verschillende verbindingen van gangliëncellen met de reflexzenuwen, waardoor eene groep vatbaar is, om zoo wel psychische als physische prikkels te ontvangen. Daar echter de achterste wortels, in dit geval, twee soorten van zenuwen bevatten, die voor gevoel en die voor reflexie dienen, is het niet te verwonderen, dat zij dikker zijn dan de voorste wortels, hetgeen algemeen bekend is. Deze dikte der wortels verschilt dan ook ruim de helft; volgens KÖLLIKER is de som van de doorsneêvlakten van alle beweegwortels tot die der gevoelwortels bij den man als 6,9 tot 15,6, bij de vrouw als 6,5 tot 13,4 *, hetgeen van de verschillende grootte

* *Mikrosk. anat.* l. c. pag. 433.

van het ligchaam en dus van de uitgebreidheid der gevoelige huid zal afhangen.

Volgens onze voorstelling geschiedt dus de reflexie niet door overspringing of dwarse geleiding, maar volgens vaste banen, waardoor de reflex geregeld wordt.

6) Wij hebben boven opgemerkt, dat hoogst waarschijnlijk de longitudinale dunne vezels van de achterste hoorns uit communicatie-draden bestaan, waardoor de verschillende groepen van gangliëncellen onderling worden vereenigd. Op deze wijze wordt, onzes inziens, de moeijelijke leer van reflexie aanmerkelijk duidelijker, doordien de reflexzenuwen tusschen deze longitudinale draden doorgaan, misschien ten deele in hen overgaan en deze draden waarschijnlijk met dezelfde gangliëngroepen zamenhangen, waarin de reflexzenuwen eindigen; daar het anders, zooals wij boven reeds hebben opgemerkt, moeijelijk te begrijpen is, hoe in den rug de achterste hoorns zoo veel smaller en kleiner kunnen zijn, dan in de lendenen *, zoodat zij noodzakelijk een veel geringer getal longitudinale draden in den rug, dan in de lendenen moeten bevatten; hetzelfde geldt ook van de cervicaal-aanzwelling en van het hooger gedeelte van den hals †. Bij reflex worden nu het eerst die spieren in beweging gebragt, waarvan de zenuwen het meest in de nabijheid ontspringen der reflexzenuwen, en waar dus de opwekking der reflexzenuw of van eenige zijner draden langs den kortsten weg van den achtersten hoorn en het centrum der grijze stof tot deze beweegcellen van den voorsten wortel te doorloopen heeft, en die beide, en voor- en achtersten wortel, zich tot eene gemengde zenuw vereenigen §. Zoo heeft bij een zeer jong kind, niet alleen kitteling in de hand buiging der vingeren ten gevolge, wegens den nervus medianus, die spierzenuwen geeft aan de flexores der vingeren en gevoel aan de binnenzijde der hand, maar eveneens veroorzaakt kitteling op den rug der hand weder uitstrekking der vingeren, door reflex op den nervus radialis, zoo als ik elders heb aangewezen **. Is echter de

* Zie STILLING, *Med. oblong.*, Pl. I, Fig. 1, vergeleken met Pl. II, Fig. 1 en 2.

† STILLING, l. c. Pl. II, Fig. 3, vergeleken met Fig. 4.

§ Zie ook VOLKMANN, *Nerven-phys.* l. c. pag. 532. Zoo kunnen zelfs reflex-verschijnselen ontstaan, wanneer de gevoel- en beweegzenuwen slechts met een segment van het ruggemerg zamenhangen. Zie VOLKMANN, l. c. pag. 543. Dit bewijst zeer het naauwe verband tusschen de voorste en achterste zenuwwortels op hetzelfde niveau.

** Over het verband tusschen de gevoel- en bewegings-zenuwen: *Tijdschrift der Wis- en Natuurk.*

prikkeling sterker of het ruggemerg meer geïrriteerd, dan worden ook verwijderde spiergroepen in werking gebragt.

Dit laatste verschijnsel scheen inderdaad een bijna onoverkomelijk bezwaar ter verklaring op te leveren, waarom VOLKMANN zich genoopt gevoelde eene dwarsleiding of overspringing aan te nemen *, waarmede KÖLLIKER in de hoofdzaken overeenstemt †. Het schijnt mij toe, dat bij onze wijze van voorstelling deze zwarigheden meest wegvallen en de verklaring eenvoudiger wordt. Stellen wij een eenvoudig voorbeeld voor; b. v. iemand brandt zich onbemerkt aan eenen vinger, zoo zal hij, zoo spoedig hij dit bemerkt, snel de hand terug trekken; dit is niet geheel willekeurig: ook bewusteloos, bij v. na aetherisatie zoude hij dit doen, of zelfs in den slaap. Wat geschiedt hier nu? De voorarm wordt gebogen, en tegelijk de bovenarm terug getrokken, dat is, de biceps en brachialis internus treden in werking voor de eerste, de latissimus dorsi en teres major voor de tweede beweging. Nu heeft het echter geenerlei zwarigheid in, om zich voor te stellen, dat de reflexzenuwen, die met de gevoelzenuwen van den vinger afkomstig zijn, door hare verbindingen in het ruggemerg de groep gangliëncellen prikkelen, waaruit de zenuwen den biceps en brachialis internus, en tevens de groep cellen gelijktijdig opwekken, waaruit die voor de latissimus dorsi en teres major ontspringen; namelijk door eene verbinding van combinatie-draden door middel van gangliëncellen, waarin de reflexzenuwen eindigen, worden dan beide groepen gelijktijdig geprikkeld en zoo beide bewegingen gecombineerd. Is de prikkel sterk, of het ruggemerg gevoeliger, dan kan de prikkel meerdere spieren in werking brengen; b.v. wanneer bij een onthoofden kikvorsch op den prikkel aan den achtervoet of toon een sprong ontstaat, dan worden door de reflexzenuwen meerdere groepen gangliëncellen tot werking gebragt, die onderling meer of minder met elkander in verbinding staan, en de beweging wordt eene gecombineerde, of gecoördineerde, een sprong. Hierbij

---

Wetensch. van de Eerste Klasse van het Kon. Ned. Inst. 1847. Op deze wijze wordt dan ook gemakkelijk het naauwe verband verklaard tusschen den loop der gevoel- en beweegzenuwen, die in denzelfden stam vereenigd zijn; zoodat, volgens de boven aangewezen wet van verspreiding, eene huidprikkeling in die spieren het eerst reflex veroorzaakt, met wier beweegzenuw die van het gevoel zich tot eenen stam vereenigt. Zie boven pag. 8.

* *Nerven-physiol.*, l. c, pag. 528 sqq. en 547.

† *Mikrosk. Anat.*, l. c. pag. 442 sq

moeten wij in het oog houden, dat er eene zekere mate van prikkeling noodig is, vóórdat de reflexbeweging ontstaat; dat is, de cellen, waarin de reflexzenuwen schijnen te eindigen, moeten tot eene zekere mate geprikkeld worden, voor zij de opgewekte werking mededeelen aan de aangrenzende groep cellen, waaruit de spierbeweging onmiddelijk wordt bewerkstelligd; zij zijn als Leidsche flesschen, die eerst moeten geladen worden, voor dat de vonk overspringt. Verwijderde of hooger gelegene reflexcellen, die waarschijnlijk door middel van longitudinale combinatiedraden in de achterste hoorns met de onmiddelijk geprikkelde in verband staan, zullen dus niet zoo spoedig tot werking worden opgewekt, of, om bij het beeld te blijven, geladen worden, als die, welke den prikkel onmiddelijk van de reflexzenuwen ontvangen; en van hier dat bijna altijd, zoo als ook Volkmann opmerkt, na eene huidprikkeling het de naast liggende spieren zijn, die het eerst worden bewogen *. Is echter het geheele ruggemerg in een sterker geprikkelden toestand, zijn als het ware de reflexcellen meer geladen, dan is er slechts een geringe prikkel noodig om eene algemeene ontlading te doen plaats hebben, en er ontstaan meer algemeene reflexbewegingen, zooals bij convulsies, epilepsie, of na het geven van strychnine. Deze opwekking heeft meestal plaats ten gevolge van eene sterkere toestrooming van het bloed (congestie), of doordien het bloed vergiftigd is, b.v. door strychnine. Geeft men nu aan eenen hond strychnine, zooals bekend is en mij uit opzettelijk hiertoe in het werk gestelde proeven bleek, dan wordt deze strychnine wel in het bloed opgenomen, en dat bloed is in bestendige aanraking met de grijze stof van het ruggemerg, die zoo rijk is aan vaten †, maar er hebben geene bestendige convulsies plaats.

Plotseling, zonder voorafgegaan verschijnsel, valt de hond om, en geraakt in convulsies, of maakt onwillekeurige bewegingen; maar deze houden na eenigen tijd op, en nu schijnt de hond weder volkomen gezond. Ik zag hierbij tusschenpozen van meer zelfs dan een uur, waarin ik den hond kon aanraken en streelen, waarbij hij rond liep zonder dat hem iets deerde, tot dat de gevoeligheid weder zoo groot geworden was, dat zelfs het eenvoudig aanblazen van lucht convulsies opwekte. Niettegenstaande dus deze grijze

---

* *Nerven-Phys.*, l. c. pag. 544, N°. 10.

† Zie Ecker, *de Cerebri et Medi spin. System. vas. capill. Traj. ad Rhen* 1853, pag. 60 sq., Fig. IX.

stof aanhoudend in wisselwerking was met het vergiftigde prikkelende bloed, waren er niet aanhoudende convulsies, maar eerst na een vrij lang tijdverloop kon de opwekbaarheid genoegzaam hiervoor hersteld worden.

Hetzelfde zien wij bij epilepsie; heeft een zwaar acces plaats gehad, dan is de lijder doorgaans langer bevrijd, volgt een ligt acces dan volgt een tweede dikwijls kort hierop; bij het vorige had, als het ware, slechts eene gedeeltelijke ontlading plaats, zoodat eerst door eene spoedig volgende het evenwigt kon hersteld worden *. Is de prikkelbaarheid verhoogd, zooals bij kinderen, dan wordt er dikwijls slechts een geringe prikkel vereischt om algemeene reflexbewegingen, dat is, stuipen te weeg te brengen; is eene meer verwijderde groep gangliëncellen meer geprikkeld, dan zal ook een verwijderde prikkel door eene reflexzenuw, die met deze groep meer op een afstand door combinatiedraden verbonden is, hierin reflexbewegingen kunnen voortbrengen, zoo als bij hysterische verschijnselen somwijlen het geval is.

7) Wij hebben echter boven gezien, dat de groepen beweegcellen, zooals ik die ter onderscheiding wil aanduiden, waaruit de beweegzenuwen ontspringen, als twee polen bezitten, dat is, zij hangen aan de eene zijde te zamen met de geleiddraden van onzen wil (voorste strengen), aan de achterzijde met de reflexzenuwen door middel van andere gangliëncellen. Zijn nu deze reflexzenuwen door middel van communicatiedraden verbonden met meerdere groepen bewegingscellen, zoodat door reflex eene gecoördineerde beweging, een sprong b.v. ontstaat, zoo kunnen wij ook aannemen, dat door middel van de voorste geleiddraden van onzen wil het gemakkelijkst die groepen gelijkelijk worden in werking gebragt, waaruit eene gecombineerde of planmatige beweging ontstaat. Nu hebben wij wel het vermogen eene afzonderlijke spier willekeurig te bewegen, waarvoor afzonderlijke geleiddraden kunnen bestaan, maar wij kunnen met even weinig inspanning of nadenken vele groepen van spieren in werking brengen, waarvan een tred, eene planmatige beweging het gevolg is, en dit wordt waarschijnlijk te weeg gebragt door eene voorbeschikte verbinding door middel van de communicatiedraden van verschillende groepen, als bij reflex worden aangedaan †. De oorzaak van de coördinatie der spier-

* Van hier misschien ook het periodische van zoo vele verschijnselen, die met het ruggemerg nader in verband schijnen te staan, als koortsen, vooral febris larvata enz.

† Dat het maken van planmatige bewegingen, b.v. het doen van eenen tred, reeds in de organisatie en bewerking van het ruggemerg, dat is in verschillende naauwere verbindingen van zekere

werking zit dus, zoo als VOLKMANN teregt vermoedde, in het ruggemerg, en het is mij altijd onbegrijpelijk geweest, hoe men dit in het cerebellum heeft willen plaatsen; immers konden dan, indien men eenen kikvorsch den kop afsnijdt, geene planmatige gecoördineerde reflexbewegingen worden bewerkstelligd, indien de oorzaak dezer coördinatie in het cerebellum te zoeken was.

De proeven van FLOURENS, HERTWICH en anderen worden, naar mijne meening, gemakkelijk verklaard; immers gaan de fibrae moventes van de corpora pyramidalia door den pons varolii naar de crura cerebri; zij decusseren hier met de dwarse vezelen van dezen pons, en tusschen beiden ligt, zoo als mikroskopische onderzoekingen mij duidelijk hebben aangetoond, eene dunne laag van grijze stof *, waarin ook kleine multipolaire cellen bevat zijn. Wordt nu een gedeelte van het cerebellum weggenomen, dan reflecteert deze sterke prikkel door middel van de dwarse vezelen op de corpora pyramidalia, en onregelmatige bewegingen zijn hiervan het gevolg. Was het cerebellum de zitplaats der coördinatie, dan zouden planmatige bewegingen op prikkeling van het cerebellum moeten volgen. Bij ulceratie echter in het cerebellum, wanneer de prikkeling meer chronisch is en niet zoo hevig, heb ik nimmer onregelmatige bewegingen zien ontstaan.

Wij meenen dus de zoo moeijelijke verschijnselen van reflex voldoende te kunnen verklaren uit de leer van bijzondere groepen van beweegcellen en van reflexcellen, en het verschillend verband waarin deze onderling door communicatiedraden geplaatst zijn.

Op deze wijze wordt ook de vreemde waarneming van SCHILLING behoor-

---

groepen van gangliëncellen gelegen is, en dus als voorbeschikt in het maaksel van het ruggemerg is uitgedrukt, wordt hoogst waarschijnlijk, indien men slechts let op een zeer jong kind, hetwelk, als de moeder het opheft, reeds zeer vroeg tegen haren schoot op, de regelmatige beweging van eenen tred, afwisselend met den regter- en linkervoet begint te maken; nog overtuigender ziet men dat in een jong kieken, hetgeen reeds terstond na het verlaten van den dop wegloopt. Tot het doen van eenen tred worden verschillende combinatiën van spierwerking gevorderd, die men niet leert ten gevolge van eene bestudeerde oefening, zoodat men na meerdere mislukkingen eindelijk eene keuze doet; maar de combinatie, die hiertoe gevorderd wordt, moet reeds in het ruggemerg georganiseerd en als voorbeschikt gelegen zijn, zoodat slechts een enkele indruk gevorderd wordt, om deze combinatie in beweging te brengen. Onze ziel kent de spieren of werktuigen niet, noch hun aantal of zitplaats, door wier verbinding zij eenen tred voortbrengt. Welk eene studie zoude het vereischen, indien wij uit alle mogelijke onregelmatige spierbewegingen, waarvoor een been vatbaar is, eerst door oefening die moesten leeren verbinden, die eenen tred veróorzaken.

* ECKER, *Diss. de Cerebri et Med. spin. syst. vas.* l. pag. 58, Fig. VII.

lijk opgehelderd, waar deze de dwarse wortels der achterste zenuwen in de grijze stof afbeeldt, waarvan eenige bundels zich naar boven, andere echter zich naar beneden ombuigen *. Waren dit gevoelzenuwen, dan zoude eene ombuiging naar beneden volstrekt geenen zin hebben, en eene verklaring van eene gevoelzenuw, die zich in het ruggemerg naar beneden omboog, eene onmogelijkheid zijn; doch zijn het reflexzenuwen, dan volgt het uit den aard der zaak, dat eenige bundels met hooger geplaatste, andere met lager geplaatste celgroepen in verbinding kunnen en zelfs moeten zijn, en zich dus naar deze ombuigen †.

8) Eindelijk hebben wij gezien dat de commissuren,, waardoor de regter- en linkerzijde van het ruggemerg verbonden zijn, meer of min tot de reflexieverschijnselen schijnen in verband te staan. Het is ons immers gebleken, dat de vezels van de achterste commissuren, voor verre het grootste gedeelte dwars doorloopen, en in het midden tusschen de beide grijze hoorns zich verliezen ten deele in dezelfde gangliëngroepen, waarin ook de reflexdraden verdwijnen, ten deele in de kleine groepen gangliëncellen, die ter zijde van het centraal-kanaal geplaatst zijn, schijnen te eindigen. § Het heeft dus allen schijn, dat de vezelen der achterste commissuren dienen voor zijdelingschen reflex, zoodat zij den in de groep reflexcellen opgenomen indruk naar de tegenovergestelde zijde kunnen overplanten, die van de voorste om bij onze willekeurige bewegingen de harmonie en overeenstemming tusschen de beide zijden te weeg te brengen, en zoo ook het evenwigt te bewaren. Hierdoor kan men op eene zeer eenvoudige wijze vele verschijnselen verklaren, die anders moeijelijk zijn te begrijpen.

Uit de proeven van van Deen ** en Stilling blijkt, dat na het doorsnijden van de eene helft van het ruggemerg bij eenen kikvorsch niet alle be-

---

* Schilling, l. c. pag. 31, Tab. II, Fig. 1 *e*.

† Hierbij wil ik nog opmerken, dat juist het verdeelen der reflexzenuwen in dunne bundels in de achterste hoorns, zooals wij, zoowel bij dwarse doorsneden, Fig. 8 *gg*, als bij longitudinale, Fig. 9 *aaa*, hebben aangetoond, schijnt te wijzen op hunnen overgang in verschillende gangliëngroepen, waardoor dus de verscheidenheid en menigvuldigheid van reflexverschijnselen nader verklaard wordt.

§ Fig. 11 *gg*. Fig. 8 *f,e,d*.

** *Nadere ontdekkingen over de eigenschappen van het Ruggemerg*, 1839, pag. 27, proef 27. pag. 61 sq., proef 47.

weging verloren is; ja gelijk STILLING uitvoerig mededeelt, indien het ruggemerg van wederzijden op eenigen afstand van elkander tot op de helft, dat is tot op de middellinie dwars wordt doorgesneden, dat het dier dan nog in staat is willekeurige sprongen en bewegingen te bewerkstelligen *.

Dat reflexbewegingen in dergelijke kikvorschen nog plaats hebben, toonde vroeger VAN DEEN mij zelven, waarbij echter de willekeurige bewegingen minder overtuigend waren, hoezeer echter nog een sprong werd verrigt †.

Deze proeven zijn inderdaad zeer vreemd, en met eene regtstreeksche leiding van den indruk van den wil niet te verklaren; maar wel laat zich denken, dat, indien eene groep gangliëncellen aan de eene zijde door den wil geprikkeld wordt, in een dergelijk geirriteerd ruggemerg door middel der commissuren, de tegenovergestelde hooger doorgesneden zijde kan geprikkeld en tot beweging aangezet worden; het is dan een reflex van boven ten gevolge van den indruk van den wil, waarvan voorbeelden genoeg in de proeven van VAN DEEN en STILLING voorkomen. Het blijft hier echter altijd moeijelijk en twijfelachtig willekeurige van reflexbewegingen behoorlijk te onderscheiden. Dat echter reflexbewegingen in de voorpooten kunnen ontstaan, wanneer bij een, op deze wijze van weêrzijden op eenigen afstand half doorgesneden ruggemerg, de achterste pooten worden geprikkeld, heb ik zelve waargenomen. Daar nu, gelijk wij gezien hebben, de achterste commissuren in dezelfde cellengroep overgaan, waarin de reflexzenuwen schijnen te eindigen, zoo is de verklaring zeer eenvoudig, dat de reflexbeweging aan de tegenovergestelde wordt medegedeeld.

Dit is echter niet mogelijk, indien men de voorstelling van het verloop der vezels in het ruggemerg aanneemt, zoo als KÖLLIKER die voorstelt §, die over deze bedenking heenspringt, door eenvoudig te zeggen, dat indien de snede op eenigen afstand van wederzijden plaats heeft, alle geleiddraden van den motorischen invloed der hersenen zijn doorgesneden en de extremiteiten onbewegelijk zullen zijn. Wat nu althans de reflexbewegingen betreft, zoo kunnen deze bij de verklaring van KÖLLIKER evenmin plaats hebben; want de vezels, die naast elkander gelegen zouden zijn en door dwars-

* STILLING, *Die Functionen des Rückenmarks*, l. c. pag. 153 sq., pag. 247 sqq. Fig. XIX, XX.

† VAN DEEN, l. c. pag. 62.

§ *Mikrosk. Anat.*, l. c. pag. 440. Zie oók boven pag. 13 sq.

leiding den reflex, volgens hem, mogelijk maken, zijn hier eveneens doorgesneden, en dus, volgens Kölliker, zouden de verschijnselen van reflex hier evenmin kunnen plaats hebben als van beweging, hetgeen stellig niet het geval is, en het onjuiste van zijne voorstelling van het verloop der zenuwvezelen in het ruggemerg duidelijk bewijst. Dat door deze commissuren de convulsive beweging aan beide zijden van het ligchaam moeten verklaard worden, al was ook de verwijderde oorzaak, b. v. eene verharding of tuberkel in de hersenen aan slechts eene zijde aanwezig, laat zich gemakkelijk voorstellen.

Daar nu echter de gekruiste vezelen der voorste commissuur, of direct als dwarse stralen in de voorste mergstrengen overgaan (Fig. 11 *d*, Fig. 12 *f*), of door middel van de randvezels en cellen aan de binnenzijde van den voorsten hoorn en de hieruit schietende stralen (Fig. 12 *c* Fig. 5 *f g*) meer indirect met deze longitudinale strengen zamenhangen, die wij als geleiders van den indruk van onzen wil hebben erkend, zoo moet de wil meer invloed op de voorste commissuur uitoefenen, en zij langs dien weg den gegevenen indruk naar de overzijde overvoeren; waaruit men kan opmaken, niet alleen hoe de harmonie der bewegingen aan beide zijden wordt onderhouden, zooals wij reeds boven hebben opgemerkt, maar ook kan dit dienstig zijn voor die spieren, die of meest, of altijd in den gezonden toestand aan beide zijden gelijkelijk worden bewogen; zoo b. v. de spieren in het midden gelegen, als de sphincteres en levatores ani, de ischiocavernosi, zoo ook de buikspieren, de intercostales, en voor een groot deel de ruggespieren om het ligchaam opgerigt of regt te houden; verder, de spieren voor slikking, voor de stem en andere, die van beide zijden steeds gelijkmatig worden in beweging gebragt. Misschien kan bij de vogels het gelijktijdig bewegen der beide vleugels voor de vlugt ook hiertoe gebragt worden. De achterste commissuur schijnt mij toe voor den meer onwillekeurigen zijdelingschen reflex te dienen; omdat, zoo als wij gezien hebben, hare vezels schijnen in het midden der grijze stof te eindigen, waar wij ook het einde der reflexzenuwen meenen gevonden te hebben. Intusschen is het verband tusschen de reflexzenuwen en de naaste voorste beweegwortels veel grooter, dan met de vezels dezer dwarse commissuren, daar, zoo als Pfluger heeft aangetoond, bij uitbreiding van reflexbewegingen deze slechts aan de eene zijde naar boven stijgen, tot dat de irritatie het verlengde ruggemerg bereikt hebbende in algemeene convulsien overslaat *. Deze

* E. Pfluger. *Die Sensorischen Functionen des Rückenmarks.* Berlin 1853, pag. 76.

achterste commissuur kan ook dienen om onwillekeurig het evenwigt tusschen de beide zijdedeelen van het ligchaam te bewaren. Deze reflexbewegingen dragen zoo zeer het karakter van planmatige gecoördineerde, of, als men wil, van willekeurige bewegingen, dat zij hiervan dikwijls geheel niet te onderscheiden zijn, b. v. het wrijven of krabben, waar men jeukte gevoelt, hetgeen evenzeer in den slaap plaats heeft en waartoe men zelfs bij sterke jeukte eene krachtige inspanning van den wil noodig heeft, om het krabben niet te bewerkstelligen, even zooals een onthoofde kikvorsch met zijnen poot den aangebragten prikkel van azijnzuur aan de zijde van zijn ligchaam zoekt te verwijderen, of, als hij hierin verhinderd wordt, soms met den poot der overzijde; waarom eenigen, zoo als E. Pflüger * verleid zijn geworden ook in het ruggemerg eene soort van willekeurig vermogen of van ziel aan te nemen, hetgeen alleen het gevolg is, dat hij het kunstige van het weefsel en zamenstel van het ruggemerg niet inzag, waarin alle deze planmatige bewegingen, door de verschillende verbindingen van de groepen gangliëncellen als voorbereid schijnen te schuilen, om door iederen prikkel, hetzij willekeurige, hetzij door reflex te worden opgewekt, zoodat zij even als de harmonische toonen eener piano onder de vingerzettingen van den speler worden voortgebragt. Bij deze voorstelling bewonderen wij wel het kunstige van alle deze schikkingen en wonderbare verbindingen, maar het is denkbaar, en naar mijn inzien niet eens zoo moeijelijk zich voor te stellen; terwijl het denkbeeld van eene willekeur in het ruggemerg, zonder bewustheid, met geheele verwerping van het bestaan eener ziel, gelijk Pflüger wil, een onding is, hetgeen zich niet denken laat. Integendeel, hoe dieper wij indringen in de kennis van het mechanisme van ons ligchaam, hoe meer wij tot de overtuiging geraken, dat het geheel als een volmaakte dienaar van onzen geest en onzen wil is ingerigt, waaraan zoowel de verwonderlijk juiste insertie, grootte en verbinding der spieren, als zekerlijk niet minder de verbinding der gangliëngroepen, waardoor deze spieren harmonisch of doelmatig bewogen worden, met eene onbegrijpelijke wijsheid en doelmatigheid zijn berekend.

Zoo zijn er inderdaad vele onwillekeurige werkingen, welke wij gewoonlijk voor willekeurige aanzien; b. v. het schreeuwen bij pijn. Dit schreeuwen schijnt niet anders dan een reflex te zijn op het bovenste gedeelte van het ruggemerg of medulla oblongata, waar zoovele verbindingen schuilen en me-

* *Die Sensorischen Functionen des Rückenmarks.* Berlin 1853. Cap. II, III.

nigvuldige reflexbewegingen ontstaan; bij hevige pijn kost het de grootste inspanning om dit schreeuwen of kermen te laten: wij worden er als van zelve toe gedwongen. Dit bleek mij vooral duidelijk in een merkwaardig geval van eene zeer verstandige dame, die zich tot mij vervoegde om verklaring en opheldering te vragen over een verschijnsel, hetgeen haar in hoogen mate bevreemd had: haar was namelijk onder den invloed van chloroform de eene borst geamputeerd geworden, zoodat zij van de geheele operatie niets had gevoeld, maar zich bij het ontwaken duidelijk bewust was, dat zij zich zelve had hooren schreeuwen, hetgeen door de omstanders werd toegestemd, en in deze gevallen wel meer voorkomt; een bewijs van het onwillekeurige van dit schreeuwen, hetgeen niets anders is dan een reflex. Van hier, dat bij vivisecties zoo vele onjuiste besluiten zijn opgemaakt over het gevoel en de gewaarwordingen bij dieren. Worden de hersenen boven den pons varolii afgesneden, en het vijfde paar sterk geprikkeld, zal het dier ook schreeuwen, ofschoon zonder bewustzijn, zonder gewaarwording en zonder gevoel van pijn.

Zoo zïen wij dit schreeuwen ook menigmaal in convulsien; zelfs bij apoplexien heb ik dit in den hevigsten graad waargenomen, waar geen spoor van bewustzijn was.

9) Zeer veel is getwist over het al of niet gevoelige van de grijze stof, van de voor-zijdelingsche of achterste strengen, waarbij de tegenstrijdigste denkbeelden ontwikkeld zijn, zoo als Volkmann die in een kort overzigt mededeelt *. Naar onze voorstelling dient de grijze stof in het ruggemerg geheel alleen voor beweging, de achterste meer voor reflex en coördinatie der beweging, terwijl het gevoel alleen door de achterste en zijdelingsche mergstrengen naar boven wordt voortgeplant. Dat dit inderdaad het geval is, bleek mij vooral uit de verschijnselen van strychnine bij eenen hond: in ligtere aanvallen traden vooral en wel het eerst de achterpooten in werking, die ook later in de aanvallen meer verstijfd bleven, zoodat het dier steil op de achterpooten stond, met naar voren schuins geneigd ligchaam. Gedurende deze stuiptrekkingen niet alleen, maar zelfs, toen het dier meer dan eens op den grond lag, met tetanisch stijf uitgestrekte pooten, had het zijn bewustzijn niet verloren, waarvan mijne toehoorders met mij getuigen waren; zelfs toen een witte doek toevallig van de eene zijde van het vertrek naar de andere werd gedragen, volgde de hond met zijne oogen en zijnen kop dezen doek, terwijl uit alles bleek, dat het

* *Nerven-Phys.*, l. c. pag. 548.

dier geene de minste pijn scheen te gevoelen. Zoo is het ook bekend, dat er na te sterke giften strychnine, de lijders, zonder iets te gevoelen, plotseling door abnormale bewegingen en schokken worden overvallen. Na den dood van den hond onderzocht ik ruggemerg en hersenen, vooral met het oogmerk om de aanwezige congestie in de verschillende deelen na te gaan, waarbij ik in de hersenen geheel geene bijzondere congestie aantrof; maar hetgeen mijne aandacht vooral tot zich trok was eene merkwaardige aandoening in de grijze stof van de lenden-aanzwelling: hierin waren namelijk vele kleine uitstortingen van bloed *, terwijl in het medullaire gedeelte niets abnormaals werd aangetroffen. In eenen anderen hond, onder den invloed van strychnine gedood, vond ik in de grijze stof van het lendengedeelte aneurismatische dilatatie der capillaire vaten, die dus zeer nabij waren om te bersten; misschien had ik in de hiervoor vervaardigde sneedjes, de ook hier plaats gehad hebbende effusie niet getroffen. In beide gevallen waren echter de beide hoorns van de grijze stof ongemeen schoon met bloed gevuld, zooals na de drooging en plaatsing onder Canada-balsem duidelijk was. Ik achte deze waarneming gewigtig genoeg, om hiervan eene afbeelding te geven, (zie Fig. 13); men ziet hierbij eene 100-malige vergrooting der capillairen in den voorsten hoorn der grijze stof, waarin bij *a b* en *c* uitstortingen van bloed voorkomen, die een gespikkeld aanzien hebben; het is echter opmerkelijk, dat in alle deze effusien een ligter gekleurd middelpunt aanwezig is, waarschijnlijk het punt van uitstorting, waar misschien door later nagevloeid serum het bloed is gedilueerd. Men ziet hier ook nog bij *d e f* eenige aneurismatisch verwijde capillairen; in de hooger gelegene deelen van het ruggemerg kwamen deze effusien niet voor, hoezeer ook de capillairen sterk gevuld waren, zoowel in de voorste als in de achterste hoorns.

Er heeft dus na het geven van strychnine eene sterke congestie en irritatie plaats in de grijze stof, die op de plaatsen, waar de aandoening en prikkeling het sterkst is, zoo als in de lendenen, in effusie of dilatatie van de bloedvaten kan overgaan; en echter geschiedt dit alles zonder eenig gevoel, zonder eenige pijn. Was de grijze stof in het ruggemerg gevoelig, of liepen de gevoelzenuwen door tot in de grijze stof, dan kan men zich eene dergelijke congestie en irritatie, hoedanig in eene gevoelzenuw zelve de hevigste pijn verwekt, niet denken, zonder eenige gewaarwording te veroorza-

* Zie ook Ecker, *Diss. laud.*, pag. 119 sq.

ken. Van hier dan ook, dat de reflexbewegingen geene pijn of gewaarwording veroorzaken in het ruggemerg, zoodat ook door deze waarneming de directe opklimming der gevoelzenuwen in het ruggemerg, waarvan ik de overtuigendste praeparaten bezit, physiologisch of pathologisch, indien men wil, bevestigd wordt.

Er blijft echter nog eene zwarigheid over, namelijk, dat indien de gevoelzenuwen regt naar boven gaan, langs de achterste strengen, tot in de medulla oblongata, dan zouden boven de decussatie de gevoelzenuwen van de regterzijde naast de beweegdraden van de linker-, die onder de corpora pyramidalia, zoo als bekend is, zich decusseren, gelegen zijn, en dus de gewaarwordingen van den regterarm aan de zijde vallen van den indruk tot beweging van den linker-, hetgeen verwarring moest veroorzaken. Wij weten echter uit de waarnemingen van Foville *, dat op de achtervlakte van het verlengde ruggemerg achter en boven de voorste decussatie voor beweging, ook eene decussatie plaats grijpt van vezels, waardoor waarschijnlijk de zenuwen van gevoel eveneens naar de tegenovergestelde zijde worden gebragt. Wat echter het nut is van deze decussatien, en waarom de beweeg- en gevoeldraden niet aan dezelfde zijde blijven, hierover zijn wij nog niet in staat zelfs eene waarschijnlijke gissing aan te geven.

Ook de plaats, waar de indruk van het gevoel wordt waargenomen, laat zich moeijelijk met eenige zekerheid bepalen: waarschijnlijk is dit echter in de medulla oblongata, waarheen het vijfde paar loopt, terwijl bij visschen, waar de eigenlijke halfronden der hersenen ontbreken, hooger op wel geene plaats is, waar men de zitplaats voor gevoel met eenigen grond zoude kunnen aanwijzen. Bovendien is het bekend, dat de beleediging der hooger gelegene deelen, vooral der groote hersenen, geene pijn veroorzaakt en dat deze voor pijn gevoelloos zijn.

Mogen wij nu na het aangevoerde vaststellen, dat de beide hoorns van grijze stof in het ruggemerg tot beweging dienen, de voorste voor meer directe beweging, de achterste voor reflex en coördinatie, dan wordt het begrijpelijk, waarom de vivisectien, op dieren in het werk gesteld, waarbij men poogde of alleen de achterste of de voorste strengen door te snijden, tot zulke uiteenloopende resultaten geleid hebben: het is immers duidelijk, dat het eene volstrekte onmogelijkheid is, om deze strengen door te snijden, zonder de grijze

---

* Foville. *Traité compl. de l'Anatomie et de la Physiol. du syst. nerv. cer.* Par. 1844, Pl. II, Fig. 4.

hoorns, die tusschen deze strengen dwars uitsteken, te kwetsen, waarvan het noodwendig gevolg moet zijn, dat door deze kwetsing, hetzij van de voorste, hetzij van de achterste hoorns verschillende bewegingen moeten worden voortgebragt, naarmate van de verschillende groepen gangliëncellen, reflexzenuwen of communicatiedraden, die gekwetst worden; zoodat langs dezen weg dit vraagstuk nimmer tot eenige oplossing kon gebragt worden, en dan ook meer verwarring in de physiologie dan licht en waarheid heeft voortgebragt.

10) Zeer gewigtig zijn de wetten voor reflex, welke door E. Pfluger als algemeene resultaten uit eene groote menigte waarnemingen zijn getrokken *, waardoor hij aantoont, dat reflex eerst aan dezelfde zijde beperkt blijft, en dus zich steeds eenzijdig vertoont †; vervolgens dat, indien reflex ontstaat uit een prikkel in de hersenen of hersenzenuwen, deze reflexbewegingen bij verderen voortgang zich uitbreiden naar de lager gelegene zenuwen en dus naar de med. oblongata toe §; dat integendeel, indien reflex ontstaat uit een ruggemergszenuw, deze bij verdere verbreiding zich van beneden naar boven naar de medulla oblongata toe uitbreidt en niet omgekeerd; heeft echter de aandoening de medulla oblongata bereikt, zoo kunnen de reflexbewegingen weder in eene omgekeerde orde naar de lagere deelen zich uitstrekken, of in algemeene convulsies overgaan **; dat eindelijk, indien eene reflexbeweging ontstaat in beweegzenuwen, die ver verwijderd zijn van de insertie der primair aangedane gevoelzenuw, deze verwijderde beweegzenuwen steeds die zijn, welke uit de medulla oblongata ontspringen ††.

Hieruit blijkt dat de medulla oblongata het voorname centrum is, waaruit de meer algemeene reflexbewegingen en convulsies haren oorsprong nemen. Reeds sedert jaren was ik gewoon hier het punt van uitgang te zoeken, vanwaar epileptische toevallen ontstaan, en waarop de geneesheer bijzonder zijne aandacht moet vestigen. Moge ook de primaire prikkel verwijderd zijn, bijv. in de ingewanden, dan liggen altijd eene ziekelijk verhoogde gevoeligheid en irritatie in de medulla oblongata ten grondslag, die haar vatbaarder maken

---

* E. Pfluger, *Die Sensorischen Functionen des Rückenmarks u.s.w.* Berlin 1853, pag. 62 sqq.

† l. c. pag. 68.

§ l. c. pag. 79.

** l. c. pag. 77.

†† l. c. pag 78.

om zich in onwillekeurige reflexbewegingen, als het ware, te ontladen *.

Het is, gelijk de ondervinding mij geleerd heeft, van het meeste gewigt voor den geneesheer op de medulla oblongata in deze ziekten zijne aandacht te vestigen, waardoor het mij reeds meermalen is mogen gelukken, bij niet te verouderde gevallen, door afleidende middelen in den nek deze zoo moeijelijk te herstellen ziekte te overwinnen.

Een naauwkeuriger onderzoek van het fijne zamenstel van de medulla oblongata en vooral van de pathologische veranderingen door langdurige epilepsie hierin te weeg gebragt, welke ik meermalen als verharding van de medulla oblongata heb waargenomen, doch waaromtrent nog geene mikroskopische onderzoekingen zijn verrigt, kan hierin nog veel licht verspreiden. De gelegenheid heeft mij tot hiertoe ontbroken om deze onderzoekingen in het werk te stellen, waarop ik de aandacht der geneesheeren wenschte te vestigen. Langs dezen weg zal het eerst mogelijk zijn, eens uit de ongelukkig, zoo ruw empirische behandeling te geraken, die omtrent epilepsie nog zoo algemeen in zwang is, en waarvan ik zoo menige treurige gevallen heb waargenomen. Eene rationeele behandeling dezer zoo hardnekkige ziekte kan alleen op eene betere kennis van de werkingen der medulla spinalis en vooral der medulla oblongata gegrond worden, waaruit wij moeten trachten den aard en het wezen van deze ziekte nader op te sporen. Misschien vind ik later gelegenheid om mijne hierover reeds gemaakte waarnemingen mede te deelen.

Werpen wij op deze physiologische gevolgtrekkingen eenen blik terug, dan kunnen wij de voornaamste punten in de volgende stellingen te zamen trekken.

1) De verschillende primitiefvezelen, die zich als bewegingzenuw in eenen spier of in een spierstelsel verliezen, schijnen uit eene groep van onderling verbondene gangliëncellen te ontspringen; zij ontvangen den indruk van onzen wil langs de voorste witte strengen en de hiermede verbondene dwarse vezels of stralen, die in eene dergelijke groep overgaan; welke prikkeling, door zich gelijkmatig over alle cellen dier groep te verbreiden, in alle be-

* Hiermede stemt overeen, dat die middelen, welke het ruggemerg vatbaarder maken voor reflexbewegingen, ook de epileptische toevallen kunnen bevorderen; zoo is b. v. aetherisatie zelfs als een herkenmiddel voorgesteld, omdat bij ware epilepsie hierop bijna altijd een acces volgt, hoedanige werking ik ook van het ruiken van chloroform heb waargenomen; de hersenen worden hierdoor verdoofd, er ontstaat bewusteloosheid, en dus nadert deze toestand in dit opzigt tot dien van een onthoofden kikvorsch, waarbij de reflexverschijnselen eveneens zooveel sterker zijn.

weegdraden der hieruit ontstane zenuw eene gelijkmatige en gelijktijdige werking te weeg brengt.

2) Het getal dezer voorste geleiddraden van onzen wil moet dus in evenredigheid zijn tot het getal cellengroepen en de verschillende combinatiën, waarvoor die vatbaar zijn, en moet dus veel geringer zijn, dan het getal mergdraden voor de gevoelzenuwen in de achterste kolommen; zoodat door het steeds bijkomen van nieuwe gevoelzenuwen de witte mergstof aan de achterzijde naar boven meer in dikte dan aan de voorzijde toeneemt, hetgeen door den vorm van het ruggemerg bij dwarse doorsneden volkomen bevestigd wordt.

3) Waar meerdere spierzenuwen ontspringen uit het ruggemerg, als voor de extremiteiten, moeten ook meerdere groepen van cellen aanwezig zijn, waaruit zij ontstaan; van hier dat de voorste grijze hoorns in de lenden- en cervicaal-aanzwelling zoo veel dikker zijn, dan in den rug of in het hooger gelegene halsgedeelte.

4) Bij dieren, welke eenvoudiger spierbewegingen uitoefenen, bij visschen, is het ruggemerg dunner, en de grijze stof, zoowel als de gangliëncellen zijn veel spaarzamer, daar er mindere combinaties van bewegingen gevorderd worden.

5) De reflexbewegingen geschieden niet door overspringing of dwarse geleiding, maar de reflexzenuwen schijnen te eindigen, ten deele in eene centrale groep van gangliëncellen, die met de verschillende groepen beweegcellen meer of minder direct te zamen hangen, ten deele schijnen zij in de longitudinale fijne vezels van de achterste hoorns over te gaan. Daar dus de achterste zenuwwortels gevoel- en reflexzenuwen tevens bevatten, wordt hierdoor tegelijk verklaard, waarom zij bijna eens zoo dik zijn als de voorste wortels.

6) De achterste hoorns der grijze stof, waardoor waarschijnlijk de verschillende groepen van gangliëncellen onderling worden verbonden, schijnen vooral te dienen voor de coördinatie van bewegingen, die bij reflex plaats hebben; deze zijn algemeener, naar mate van den meer geprikkelden toestand der grijze stof of van de gangliëncellen.

7) Door deze verbindingsdraden schijnen de groepen van beweegcellen zoo vereenigd te zijn, dat, gelijk slechts een prikkel aan eenen teen vereischt wordt om, door reflex, bij een kikvorsch eene gecoördineerde beweging, of eenen sprong te veroorzaken, zoo ook misschien slechts een indruk vereischt wordt

om eene geregelde planmatige beweging (bijv. eenen tred) te weeg te brengen, die dan door bijzondere indrukken op elke dier celgroepen weder naar omstandigheden kan worden gewijzigd. De oorzaak van de coördinatie der bewegingen zit in het ruggemerg, niet in de kleine hersenen.

8) De dwarse commissuren schijnen te dienen om de harmonie der bewegingen tusschen de beide zijden te bewaren: de voorste, die meer met de geleiddraden van onzen wil schijnt zamen te hangen, voor de harmonie der willekeurige bewegingen en van de aan wederzijden gelijktijdig werkende spieren van het ligchaam; de achterste voor de onwillekeurige harmonie bij reflex, het evenwigt van het ligchaam enz.

9) De beide hoorns der grijze stof schijnen ten naauwsten met de beweging in betrekking te staan: de voorste zijn de directe bronnen voor beweging, de achterste meer voor reflex en coördinatie. Na het geven van strychnine ontstaat er congestie of effusie van bloed in beide hoorns. Gevoelig schijnen zij niet te zijn.

10) De medulla oblongata schijnt het algemeen middelpunt te zijn, waar de reflex op beide zijden overspringt, en van wier geprikkelden toestand algemeene trekkingen als convulsies, epilepsie, enz. schijnen af te hangen.

VERKLARING DER FIGUREN.

Alle Figuren zijn geteekend op 100-malige vergrooting, behalve Fig 5 en Fig. 8 op ongeveer 60-malige en Fig. 12 op 10-malige vergrooting.

Fig. 1. Gedeelte van eene groep van eenige gangliëncellen uit den voorsten hoorn van het lendengedeelte eener koe, waarin de menigvuldige communicatiedraden zigtbaar zijn, waardoor deze cellen onderling te zamen hangen.

a a' Twee gangliëncellen, door korte communicatiedraden verbonden; eenige communicatiedraden zijn langer, als tusschen *b, c*; andere loopen over eene gangliëncel heen, als *a' e*; andere schijnen door meer dan eenen draad verbonden, *a, d*.

Fig. 2. Eene gelijksoortige groep gangliëncellen.

a, b, Langere communicatiedraad.

Fig. 3. Dwarse doorsnede van een gedeelte van den voorsten hoorn der grijze stof, waarin eenige zenuwwortels intreden.

a. Grijze stof van den voorsten hoorn, waarin meerdere multipolaire cellen, onderling door een net van communicatiedraden vereenigd. Hiertusschen loopen ook bloedvaten, waarvan twee bij *a a* zijn aangewezen; uit de cellen ziet men bij *b, b, b, b* meerdere draden in de zenuwwortels overgaan.

Fig. 4. Longitudinale sectie langs de intrede der zenuwwortels in den voorsten hoorn, en oorsprong der beweegzenuwen.

a a, Longitudinale draden van de voorste mergstrengen.

1, 1, Twee zenuwvezels, die in eene cel uitloopen en in twee verschillende bundels schijnen over te gaan.

2. Twee andere zenuwvezels uit de eene zijde van eene cel afkomstig.

3, 4. Twee zenuwvezels, die scheef onder de andere door in de cel 4 overgaan.

5, 6. Andere cellen, waaruit zenuwvezels ontspringen.

7\. Zenuwvezels, die zich in het dieper gelegene gedeelte van den hoorn verliezen.

8, 9. Communicatiedraden tusschen verschillende cellen, zooals zij zich tot groepen vormen.

Fig. 5. Dwarse sectie door den voorsten hoorn, en intrede van een zenuwwortel.

A A A. Medullaire stof of voorste strengen, waarvan de longitudinale vezels dwars zijn doorgesneden.

B B. Grijze stof van den voorsten hoorn met zijne cellen en zenuwvezelen.

a, *b*. Twee zenuwwortels voor beweging, die in de grijze stof zich verdeelen.

c c c. Multipolaire cellen waarin de vezelen van de zenuwwortels overgaan.

d, *e*. Andere groep cellen, die gedeeltelijk met de vorige, gedeeltelijk onderling te zamen hangen, en menigvuldige draden uit de randvezels, die de grijze stof omgeven, ontvangen.

f, *g*, *h*, *i*. Grijze stralen, die uit den hoorn en de witte mergstrengen uitloopen en zich hier verdeelen; hunne vezels gaan of spoedig in cellen over, als bij *f*, of dringen tot de verwijderde cellen door, als bij *h*, of zij vormen randvezels, als bij *i*, die zich alle in verwijderde cellen schijnen te verliezen en met den zenuwwortel *a* zich kruisen zonder hierin over te gaan.

Fig. 6. Longitudinale sectie aan den rand der witte en grijze stof uit den voorsten hoorn.

a, *b*. Longitudinale mergvezelen, waarvan een paar der binnenste bij *a* en *g* in multipolaire cellen overgaan; bij *g* schemert nog eene andere cel tusschen de longitudinale vezels door.

c, *d*. Dwarse vezels, als stralen der grijze stof, die tusschen de mergvezelen doorloopen, en hier zich ombuigende in deze vezelen bij *e* en *f* schijnen over te gaan. De cellen zelve zijn weder door communicatiedraden vereenigd.

Fig. 7. Longitudinale sectie uit de achterste strengen, op de plaats, waar een zenuwwortel intreedt.

a, *b*. Een zenuwwortel voor gevoel, die zich terstond naar boven ombuigt, en in de longitudinale strengen of vezels voor gevoel overgaat.

c, d. Een tweede wortel, wiens draden dwars door de witte strengen, meer of min als bundels verdeeld, loopen, om in den achtersten hoorn zich te verliezen als zenuwwortel voor reflex.

Fig. 8. Dwarse doorsnede van den achtersten hoorn met intredende zenuwen.

a, b, c. Zenuwwortels, waarvan de vezels, in vlechten zich verdeelende, naar de grijze stof verloopen, en tusschen de longitudinale mergdraden doordringen; bij *a* en *c* ziet men twee wortels, die niet verder doordringen en afgesneden gevoeldraden schijnen te zijn, de andere zijn reflexdraden.

d, e. Groep gangliëncellen in het midden der grijze stof aan de basis van den achtersten hoorn gelegen, waarin de meeste vezelen schijnen zamen te loopen.

f. Gedeelte der achterste commissuur, waarvan de vezels deels dwars door in de grijze stof bij *d* en *e* zich verliezen, deels gaan zij in den hoorn bij *k* over, deels loopen zij uit in de randvezels *h h h* die den hoorn omgeven.

g, g. Fijne vezels der reflexwortels, die den achtersten hoorn in verschillende bundels doordringen en in de centrale cellen bij *d, e* schijnen te eindigen. In eenigen ziet men kort bij hare intrede eene multipolaire gangliëncel liggen.

h, h, h. Randvezels, die van alle zijden den hoorn omringen, en meest uit de zijstralen bij *l* schijnen te ontstaan, en die zich van wederzijden naar het algemeene middelpunt bij *d, e* ombuigen. Aan de achterste oppervlakte des hoorns en ook in de nabijheid der commissuur ziet men meerdere cellen, die in deze randvezels gelegen zijn.

i, i. Twee cellen, tusschen de mergcellen gelegen, waarvan ik de verbinding niet ontdekken kon.

l. Zijstralen, die zich tusschen de witte mergvezels verdeelen en in de randvezels van de grijze stof overgaan.

k, k. Andere verstrooide gangliëncellen, die in de grijze stof, vooral van den achtersten hoorn, meer verspreid gelegen zijn.

m. Doorgesneden bundels longitudinale vezels, die vooral aan den buitenrand van den achtersten hoorn, somwijlen in groot getal voorkomen.

Fig. 9. Longitudinale sectie aan den rand van den achtersten hoorn.

a, a, a, b, b. Grijze stof, uit fijne longitudinale vezels bestaande.

c. Witte dikkere mergvezels, die naar boven gaan.

a, a, a. Dwarse vezels, die gedeeltelijk tusschen de dikkere mergvezels, gedeeltelijk tusschen de dunnere grijze vezels loopen, gedeelten van reflexbundels; bij *a, a, a* ziet men ook meerdere dwars doorgesneden vezels, waarin deze reflexdraden, zooals in den bovensten bundel, zich ombuigen.

Fig. 10. Longitudinale sectie van een gedeelte van de lange vezels uit de grijze stof van den achtersten hoorn met kleine langachtige cellen, die bij afgezonderde groepen hier voorkomen.

Fig. 11. Dwarse doorsnede van de commissuren.

a. Centrale opening of kanaal, hetwelk zich door het geheele ruggemerg uitstrekt; van binnen met conische epitheliaalcellen bekleed.

b. Voorste fissuur, *m* achterste fissuur.

c, d. Vezels der voorste commissuur, die zich vlechtachtig verdeelen na de overkruising en zich in de witte mergstof of binnenste strengen, tusschen de fissuur en den voorsten hoorn als stralen verdeelen. Ter zijde van de overkruising zijn bestendig longitudinale strengen, *e,* die dwars zijn doorgesneden; zoo ook vrij aanzienlijke doorgesnedene bloedvaten, ten deele in deze strengen, ten deele naast de centraal-opening.

f. Groep kleine multipolaire cellen, waarin een gedeelte der vezels van de voorste commissuur overgaan.

g, g. Andere groepen cellen, waarin het voorste, gemeenlijk lichter gekleurde gedeelte van de achterste commissuur overgaat.

h. Achterste gedeelte van de achterste commissuur, waarvan de stralen in de basis van den achtersten hoorn uitloopen.

i. Randvezels om de grijze stof, waarin en waardoor een gedeelte der achterste stralen loopen, waarvan men eenige vezels zich buitenwaarts naar het middelpunt van den hoorn in de rigting van *k* ziet verspreiden.

m. Achterste fissuur.

Fig. 12. Dwarse doorsnede van het ondergedeelte der lenden-aanzwelling als algemeen overzigt, op 10-malige vergrooting, om het verband der deelen in de vorige figuur, die naar hetzelfde voorwerp geteekend is, beter te overzien.

a, b, c. De eene helft van het ruggemerg, zoo naauwkeurig mogelijk geteekend, de andere helft *d e* in schets gehouden voor de aanwijzing der letters.

d, d. Achterste zenuwwortel.

e, e. Voorste zenuwwortel.

f. Stralen uit de voorste commissuur afkomstig, die zich in het merg verdeelen.

g. Stralen die aan alle zijden uit den voorsten hoorn en de mergstrengen overgaan en zich hier verliezen.

h, i. Randvezels om den achtersten hoorn, die zich ten deele krom naar binnen ombuigen en achterste mergstralen opnemen.

k. Centrale gangliëngroep, waarin de dwarse vezels der achterste commissuur, de randvezels en de doordringende reflexwortels der zenuw *d* zich schijnen te vereenigen.

l. Gangliëncellen in den voorsten hoorn, waarin ten deele de zenuwwortels, ten deele de draden der randvezels overgaan (deze cellen zijn schematisch geteekend, daar men die bij deze vergrooting niet zien kan; het overige is getrouw naar de natuur).

m. Centraal kanaal.

Fig. 13. Dwarse sectie van een gedeelte van den voorsten hoorn, uit de lenden-aanzwelling van eenen hond, door strychnine gedood, gedroogd onder Canada-balsem tot aanwijzing van de verspreiding der bloedvaten; 100-malige vergrooting.

a, b, c. Drie plaatsen, waar uit de capillaire vaten bloed is uitgestort, hetgeen zich gespikkeld vertoont. In allen schijnt eene helderder kern aanwezig te zijn; de spikkels bloed vertoonen zich hier en daar als langere strengen.

e, d, f. Verwijde capillaire vaten, die aneurismatisch zijn uitgezet.

AANHANGSEL.

Nadat ik deze mijne verhandeling, met bijgaande afbeeldingen, over het Ruggemerg aan de Koninklijke Akademie den 27sten Januarij 1854, ter beoordeeling en opname in hare werken had aangeboden, zijn er, vóór dat tot den druk der verhandeling kon worden overgegaan, meerdere bijdragen van verschillende schrijvers over ditzelfde onderwerp verschenen, waardoor alles nog nader is toegelicht en bevestigd, zoodat ik het voornaamste hiervan meen met weinige woorden te moeten vermelden.

Vooral komen hierbij in aanmerking twee bijdragen van Rudolph Wagner, in de *Göttinger Gelehrt. Anzeigen;* het eerste geplaatst in het nommer van 30 Jan. 1854, het tweede in het volgende van 6 Maart.

In deze stukken komt op vele plaatsen zulk eene overeenstemming voor met meerdere der door mij aangevoerde waarnemingen en daadzaken, en zelfs met vele mijner physiologische verklaringen, dat ik het als eene bijzondere bevestiging der waarheid beschouw, zulk eene verrassende overeenkomst te vinden tusschen mijne onderzoekingen en gezigtspunten met die van den zoo beroemden schrijver, die onder de neurologen van onzen tijd zulk eene hooge plaats bekleedt *.

In zijne eerste bijdrage, *Ueber die Elementar Organisation des Gehirns,* beschouwt Wagner teregt primitiefvezels en gangliëncellen als de essentiëele deelen van hersenen en ruggemerg, en komt tot het volgende besluit: *Gehirn und Rückenmark sind nichts anders, als massenhafte Anhaufungen von*

* Deze overeenstemming is hier en daar zoo sterk, dat ik ter verwijdering van alle denkbeelden van eenig plagiaat het niet geheel overbodig acht op te merken, dat mijne verhandeling reeds den 24sten December 1853 der Akademie werd aangeboden; doch om tijdgebrek op die vergadering, werd de voorlezing hiervan tot de volgende zitting van den 27sten Januarij 1854 uitgesteld, dus 3 dagen vóór de opname van het stuk van R. Wagner, in de *Gött. Gelehrt. Anzeigen.*

Primitivfasern und multipolaire Ganglienzellen. Verbindungen von Primitivfasern kommen nicht vor, als unter Vermittelung von Ganglienzellen. Mithin geschehen alle Uebertragungen von einer Primitivfaser auf die andre auf nachweisbaren anatomischen Wegen. Graue Substanz und deren Wirkungen auf die Nervenfasern ist der unklare Ausdruck für den klaren: multipolaire Ganglienzellen mit Primitivfasern verbonden. Alle Innervations-Erscheinungen beruhen auf Verbindungen von einzelnen Ganglienzellen und grösseren Ganglienzellen-aggregaten, als eigenthümlichen Innervationsprovincen von verschiedener physiologischer Dignität, unter sich und mit centralen und peripherischen Nervenbahnen. Der Annahme einer Uebertragung von Faser auf Faser im Sinne etwa der sogenannten paradoxen Zuckung bedarf es nicht; eine solche ist aus vielen hier nicht zu erörternder Gründen im höchsten Grade unwahrscheinlich; sie könnte nur störend in den Gang physiologischen Erscheinungen einwirken *.

Uit het boven aangevoerde blijkt genoegzaam, hoe geheel dit alles overeenstemt met hetgeen door ons, en wel reeds in het jaar 1848 is voorgedragen. Ten opzigte van het maaksel van het ruggemerg geeft Wagner slechts kort zijne denkbeelden op. In de beschouwing der achterste wortels neemt de schrijver, even als wij boven hebben aangetoond: 1) zuivere sensitive vezels aan, die, zonder zich met gangliëncellen te verbinden, naar de hersenen naar boven gaan en hier het gevoel verwekken.

2) Neemt hij een tweede gedeelte van zuiver sentitive vezels aan, die zich met de gangliëncellen zouden vereenigen in de achterste hoorns, en met de kleine daarin aanwezige (ook door ons beschrevene) multipolaire gangliëncellen verbinden, vanwaar weder vezels longitudinaal naar de hersenen zouden opstijgen, terwijl andere als commissuurvezels achter het kanaal in de gangliëncellen van den tegenovergestelden achtersten hoorn zich zouden begeven. Het kanaal zelf is ook, volgens Wagner, open en niet als eene digte streng van gangliëncellen, zoo als dit zeer verkeerd beschreven is (Kölliker).

Eindelijk een derde en wel een zeer aanmerkelijk deel der achterste wortelvezels dient niet voor gevoel, maar gaat naar de groote multipolaire gangliëncellen, waaruit de voorste vezels voor beweging ontspruiten.

---

* *Gött. Gelehrt. Anzeig.*, 30 Jan. 1854, pag. 35 sq.

Hieruit ziet men, dat Wagner van onze voorstelling slechts afwijkt door ook gevoelvezels aan te nemen, die dwars in de achterste hoorns in gangliëncellen overgaan. Mij komt deze voorstelling minder waarschijnlijk voor; doordien ik in deze dwarse achterste wortels geen verschil heb kunnen ontdekken, en deze, als onderling geheel gelijkvormig, mij toeschijnen of alle tot reflexzenuwen of tot gevoelzenuwen gebragt te moeten worden. Twee zoo verschillende soorten van zenuwdraden, als voor gevoel en voor reflexie, kan men hier bezwaarlijk aannemen. Bovendien betwijfel ik dezen zamenhang van eigenlijke gevoelvezels met de achterste hoorns, omdat prikkeling van de grijze stof in het ruggemerg door strychnine, waarbij ook in de achterste hoorns sterke congestie ontstaat, geene pijn verwekt. Eindelijk hebben wij aangetoond, dat de opgaande grijze vezels in de achterste horens, althans voor verre het grootste gedeelte, niet tot de hersenen doorloopen, daar in het midden van den rug de achterste hoorns zoo smal worden, dat hier de meeste opgaande vezels verdwenen zijn. Intusschen erken ik gaarne, dat de vraag nog geheel onbeslist is, of bij het ontstaan van reflexgevoel of medegevoel de eigenlijke gevoeldraden eerst in de plaats van perceptie, zooals mij het waarschijnlijkst voorkomt, in de medulla oblongata door gangliëncellen aan elkander hunne werking mededeelen, dan of zij ook in een naauwer verband staan tot de achterste grijze hoorns en het ruggemerg. Ik zoude nog eerder geneigd zijn aan te nemen, dat de dwarse stralen, die uit de achterste hoorns in de achterste witte strengen zich verspreiden, eenig nader verband tusschen deze deelen konden bewerkstelligen, hoezeer mij wegens ongevoeligheid van reflex dit niet duidelijk is; misschien geven zij ons kennis van reflex. Dat overigens de opgaande zoo dunne vezels in de achterste hoorns in een te groot aantal zouden aanwezig zijn, om de verschijnselen van reflex te verklaren, komt mij niet overtuigend voor, indien men bedenkt, hoe bij een eenigzins geprikkelden toestand van het ruggemerg ieder gevoelig punt van de huid zijn prikkel op alle deelen van het ruggemerg overbrengt, en hiertoe wordt een oneindig aantal vezels vereischt, om met de verschillende gangliëncellen eene gelijkmatige verbinding genoegzaam te weeg te brengen.

Eindelijk verklaart ook Wagner uit dezelfde reden, het aanwezen namelijk van reflexvezelen in de achterste wortels, waarom deze dikker zijn, en neemt dus ook de reflex-motorische zenuwen van Marsshal Hall aan *, hetgeen

* l. c. pag. 39,

wij boven breeder hebben uiteengezet, en reeds in onze in 1848 uitgegevene bijdrage, over de structuur van het ruggemerg, met dezelfde en meerdere bewijzen hebben zoeken te staven *.

Van de voorste strengen neemt dan ook WAGNER aan, dat alle vezels in de groote massa's van gangliëncellen in de voorste hoorns treden, en niet met de hersenen in eene directe verbinding staan. Zoo ook stelt hij dat de voorste strengen uit vezels der voorste gangliën ontspringen †, ofschoon hij het juiste verband der dwarse stralen mij toeschijnt niet erkend te hebben. Ik kan echter de stelling van WAGNER niet geheel toestemmen, dat de reflexdraden van achteren direct in de voorste multipolaire gangliëncellen, waaruit de beweegvezels ontspringen, zouden overgaan. Wij meenen, dat zij nog eerst met kleinere cellen, tusschen beide hoorns gelegen, zich verbinden, en dus indirect met de gangliëncellen voor beweging te zamen hangen, waardoor misschien ook het te spoedig ontstaan van reflexverschijnselen gematigd wordt.

Vervolgens voegt WAGNER de opmerkelijke stelling er bij, dat wij nimmer, of althans in de minste gevallen, enkele primitiefvezels, maar altijd groepen van primitiefvezelen in werking kunnen brengen; terwijl voor grootere spieren meerdere multipolaire gangliën tot eene groep verbonden zijn, § eene voorstelling, die geheel met het door ons boven aangevoerde overeenkomt; doch ook voor de kleinere spieren geloof ik, dat eene enkele gangliëncel geene vezels genoeg uitgeeft.

Eindelijk stelt WAGNER het als twijfelachtig, of de uit de hersenen ontspringende, de spieren willekeurig prikkelende vezels zich met een eigendom-

---

* Aanteekeningen uit de sectievergaderingen van het *Provinciaal Utrechtsch Genootschap*, 1848, pag. 13. Zie ook boven pag. 10.

Dat deze bijdrage in de aanteekeningen van het verhandelde in de sectie van het *Provinciaal Utrechtsch Genootschap* van 1848 aan R. WAGNER is onbekend gebleven, ofschoon daarin reeds de meeste van zijne denkbeelden voorkomen, is bij mij zonder den minsten twijfel; daar deze aanteekeningen slechts aan de leden zijn verspreid, en de vertaling hiervan in het Zweedsch tijdschrift wel niet ter kennis van den beroemden schrijver gekomen is, dien ik veel te hoog schat, om ook slechts een oogenblik deswege den geringsten twijfel te kunnen voeden. Intusschen is deze onafhankelijke groote overeenstemming van denkbeelden eene sterke waarborg voor de waarheid, en dit is van veel meer gewigt als de prioriteits-kwestiën van onze dagen.

† l. c. pag. 38.

§ l. c. pag. 39, in nota X.

melijk systeem van gangliëncellen in het ruggemerg en verlengde merg vereenigen, dan of de gangliëncellen met reflex-motorische vezels hiertoe dienen, waarvan hij het laatste gevoelen voor het waarschijnlijkste houdt, omdat de wil de reflexverschijnselen onderdrukken kan. Wij gelooven, door het ontdekken van het verband der uit de voorste hoorns uitstralende dwarse vezels met de longitudinale voorste strengen deze vraag anatomisch beslist te hebben.

In het tweede stuk van WAGNER *Ueber den Bau des Rückenmarks und die daraus resultirende Grundlage zu einer Theorie der Reflexbewegungen, Mitbewegungen und Mitempfindungen,* * treedt de schrijver meer in de verdediging van eigenlijke reflexzenuwen, waarin wij hem geenszins zullen volgen, daar wij boven reeds de voornaamste bewijzen hebben uiteengezet. Alleen komt de schrijver nog eens terug op het verband tusschen de reflexvezelen in de achterste hoorns en de gangliëncellen voor beweging in de voorste hoorns, en zegt, dit nog eens met in chromzuur verhard ruggemerg onderzocht te hebben, maar niet tot zekerheid gekomen te zijn. Hij betuigt zelf: *Ob aber die von den Hinterhörnen der grauen Substanz deutlich zu den grossen Gangliencellen der Vorderhörnen sich begebenden Faser vorher in den Hinterhörnen sich mit Gangliencellen verbinden, und van dieser erst graue Commissurfasern zu den motorischen Gangliencellen der Vorderhörnen begeben, ist mir zweifelhaft geblieben* †. Hij beschrijft ook de gangliën in het midden tegen de achterste ruggemergspleet, als kleiner, met een geringer getal stralen, juist zoo als ook wij deze gevonden hebben. Dat echter in deze gangliën ook eigenlijke gevoelzenuwen zouden overgaan, hetgeen WAGNER in zijn eerste stuk stelde, van waar eenige draden naar de hersenen voor gevoel, en andere uit dezelfde gangilën voor reflex naar de voorste hoorns zouden overgaan, komt mij hoogst onwaarschijnlijk voor. Ik betwijfel zeer sterk, dat eene zuivere gevoelzenuw te gelijk reflexzenuw voor beweging zijn kan: reeds hierdoor zoude zij haar karakter als gevoelzenuw verliezen, en dan wordt het aannemen van eigenlijke

---

* *Gott. Gelehrt. Anzeigen* 1854. März. N°. 6.

† l. c. pag. 97. Hoezeer wegens den ongemeen fijnen en moeijelijk te volgen loop van de vezels in de achterste hoorens het bezwaarlijk is tot eene volkomene zekerheid te geraken, gelooven wij in onze voorstelling, zooals wij die boven, als hoogst waarschijnlijk, ja met eene voldoende zekerheid hebben uiteengezet en afgebeeld, deze vraag zoo zeer in dezen laatsten zin te hebben beslist, als in dit fijne weefsel mogelijk is.

reflexzenuwen overbodig; terwijl ter verklaring van medebewegingen, waartoe de werkingen van den nervus oculomotorius gebragt worden, en van het medegevoel door den schrijver geene nieuwe gronden worden aangevoerd, en deze mij toeschijnen hooger in de hersenen, of medulla oblongata, zooals wij reeds boven hebben aangemerkt, te geschieden. Naar onze meening is het vooral de medulla oblongata, waarin de meeste en moeijelijkste vraagstukken verborgen liggen: hier is de kern en het centraalpunt, van waar de meeste verschijnselen uitgaan; hier schijnt de plaats van perceptie of van gevoel te liggen; hevige pijnen bewerken hier de reflex bij het kermen; hier springen reflexbewegingen naar beide zijden over, hier is het centrum voor automatische ademhalingsbewegingen en voor slikking; van hier ontleent de nervus vagus zijn merkwaardigen invloed op het hart; hier eindelijk verwekt een geprikkelde toestand opwekking der geslachtsdeelen, en zelfs schijnt de medulla oblongata op de werking der nieren invloed te hebben; hier ligt de gordiaansche knoop, waarvan de ontknooping, en niet de doorklieving, meer dan een Alexander zal vereischen.

Ook Remak leverde ter zelfder tijd nog eene bijdrage tot de structuur van het ruggemerg *, waarin hij eenige door Stilling vervaardigde en reeds twee jaren vroeger hem toegezonden praeparaten beschrijft van dwarse en langsneden in den mensch en de koe. Remak zegt hierin den overgang der beweegwortels in de voorste gangliëncellen te erkennen; buitendien vindt hij aan dwarse sneden smalle bundels donkelrandige zenuwdraden, die een zamenhang tusschen de voorste en achterste wortels schijnen daar te stellen. Hij beschrijft, zoo het mij toeschijnt, ook de circulaire randvezels, die wij boven hebben afgebeeld, en de gangliëncellen in de substantia gelatinosa, waarvan volgens Remak eene verlengde draad de gevoelwortels vergezelt; terwijl de hoofdmassa dezer gevoelwortels (onze reflexvezels) in breede digte bundels door de gelatineuse substantie in de achterste graauwe zuilen tot in het bereik der groote multipolaire gangliëncellen (dus in de voorste hoorns) instraalt. Ook Remak schijnt dus deze directe verbinding niet met overtuiging gezien te hebben; terwijl overigens zijne beschrijving met de onze vrij wel overeenkomt. Hij merkt echter nog op, dat de circulaire randvezels wel de banen schijnen

---

* Zie *Monatsberichte der K. Acad. d. Wissenschaften zu Berlin.* Jan. 1854.

aan te duiden, waarop bij onthoofde dieren de prikkeling van sensibele zenuwen reflexbewegingen veroorzaken; wij hebben gezien, dat aan de voorste hoorns deze randvezelen dienen om de longitudinale strengen door de zijstralen op te nemen en naar de groote multipolaire beweegcellen over te brengen.

Van gewigt is het, dat Remak ook in den sympathicus multipolaire cellen heeft ontdekt, die mij nog niet zijn voorgekomen, daar ik in den sympathicus geene andere als bipolaire heb kunnen ontdekken; doch de bevestiging dezer ontdekking zal van veel gewigt zijn, maar waarbij ik, als op het oogenblik vreemd aan ons onderwerp, niet langer wil blijven stilstaan.

Ook nog Schiff heeft onderzoekingen over het ruggemerg in het werk gesteld, die vooral in vivisectien bestaan, waaruit hij meent te kunnen besluiten, dat de grijze stof ook zelfs in de achterste horens ongevoelig was, maar vezels bezat, die den ontvangen indruk naar de hersenen zouden geleiden en gevoel opwekken, zonder zelve gevoelig te zijn, en die hij met den vreemden naam van *fibres esthesodiques* wil onderscheiden van vezels voor beweging, die hij *fibres kinesodiques* noemt *. Uit het geheele opstel blijkt echter overtuigend, dat Schiff overal reflexverschijnsels met gevoel of perceptie heeft verwisseld, en in de dwaling van zoo vele schrijvers is gevallen, die het schreeuwen altijd als een bewijs van gevoel aanzien, terwijl wij hebben aangetoond, dat dit ook zonder perceptie kan plaats hebben. Intusschen schijnen mij zijne proeven, dat indien men het ruggemerg dwars doorsnijdt en nu de grijze stof met eene naald prikkelt, dit geen pijn verwekt, zooals ook reeds door andere schrijvers is opgemerkt, gewigtig, en ook voor hetgeen wij hieromtrent hebben medegedeeld, bevestigend †.

Gewigtiger zijn naar mijne meening de onderzoekingen van Schiff, waarin hij door meerdere vivisectien trachtte te bewijzen, dat de voorste strengen van het ruggemerg beweegvezels bezitten voor de extremiteiten, de zijdelingste strengen voor de beweging van den tronk, zoowel van de borst als van den buik. In de voorste strengen zouden tevens de vegetative draden gelegen zijn voor maag en ingewanden, zoodat bij doorsnijding hiervan zich roode plekken, tot zelfs donkerbruin toe, met loslating van het slijmvlies in de maag vertoonden. Hoogst

* *Comptes rendus* 22 Mai 1854, pag. 924 sqq.

† l. c. pag. 929.

merkwaardig echter zijn de proeven, waar de zijdelingsche strengen bij honden werden doorgesneden aan de eene zijde. Deze dieren kon hij nog 6 tot 10 weken in het leven houden, waarbij de eerst plaats hebbende verlamming spoedig verdween, zoodat zij zich geheel herstelden en op 4 pooten liepen; maar in deze gevallen was dan alle beweging van de ribben en van den buik aan de beledigde zijde verdwenen en had daar de ademhaling opgehouden *.

Indien wij hiermede verbinden het gevoelen van **Clarke**, die, zooals wij boven hebben opgegeven, † meent gevonden te hebben, dat ook door het geheele ruggemerg aan de zijden eene kolom van gangliëncellen aanwezig is, waaruit boven de nervus accessorius ontspringt, dan verkrijgt dit gevoelen hooge waarschijnlijkheid, en verdient een nader onderzoek.

Eindelijk heeft ook nog F. L. **Clarke** een vervolg van zijne waarnemingen over het ruggemerg gegeven §. Hij zegt hierin: 1) dat de achterste zenuwwortels uit drie soorten bestaan, waarvan twee de achterste de grijze hoorns intreden in een regten hoek, terwijl de derde onder verschillende graden van scheefheid schuins naar boven loopen naar de hersenen in de achterste strengen, de eerste soort zoude zich in de achterste hoorns naar beneden ombuigen, (onze communicatievezels), en ten deele doordringen tot in de voorste witte colommen en zich hier naar boven en naar beneden ombuigen, hier en daar lissen vormende; de tweede soort zoude gedeeltelijk in commissuren overgaan; 2) de vezels der voorste wortels zag hij nimmer in de voorste witte kolommen opstijgen; 3) behalve de dwarse bundels, die de voorste wortels vormen, komt een systeem van buitengemeen fijne vezels van de voorste grijze stof, die zich verliezen, naarmate zij de oppervlakte van de medulla spinalis naderen (onze zijdelingsche stralen); 4) dat bijna alle, zoo niet het geheel der vezels, die de wortels der spinaalzenuwen zamenstellen, in eens gaan naar de grijze stof van de medulla, en dat, indien eenige van hen direct naar de hersenen opklimmen, deze alleen die van de achterste wortels moeten zijn, die longitudinaal loopen met de achterste kolommen. Hij ontkent overigens even als vroeger niet, dat een gedeelte der zenuwwortels met de gangliëncellen verbonden is, maar hij achtte de zekerheid dezer verbinding nog onvol-

---

* Vierordt, *Archief für Physiolog. Heilkunde*, 13 Jahrg. I Heft. 1854, pag. 30 sqq.

† Zie boven pag. 18.

§ *Phil. transactions* van 1853. Part III, pag. 347 sqq.

doende. Verder is hij ook geneigd te gelooven, dat de grijze stof geene indrukken van en naar de hersenen overbrengt. Omtrent reflex en het verband met de spierzenuwen komt hij niet tot duidelijke begrippen, en meent de gelijktijdige en sympathische bewegingen in verwijderde stelsels van spieren, die anders zouden schijnen niet zamen te hangen, te moeten verklaren uit de zonderlinge vermenging der zenuwwortels, die op- en nederwaarts in de medulla spinalis zouden divergeren en daar innig onder elkander vermengd worden. Eindelijk neemt hij ook, in tegenspraak met Kolliker, een centraalkanaal aan in het ruggemerg van den mensch.

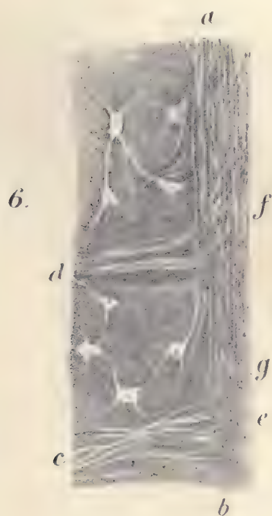
Genoeg, dat ook in eenige punten door Clarke het boven aangevoerde wordt bevestigd. Zijne methode echter, om de schijfjes helder te maken voor het mikroskoop, kan naar mijne ervaring niet tot juiste resultaten leiden, daar hierbij het ruggemerg te sterk door terpentijn veranderd wordt, zooals wij boven hebben gezien





J. L. C. Schroeder van der Kolk ad nat: del.

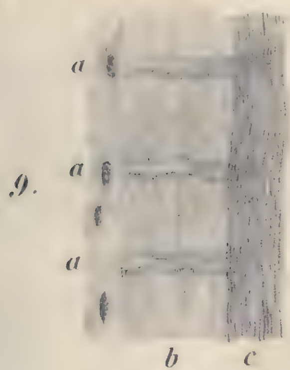
Lith. v. Meijer & C°. Amst.

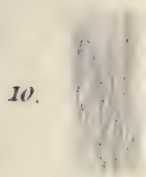


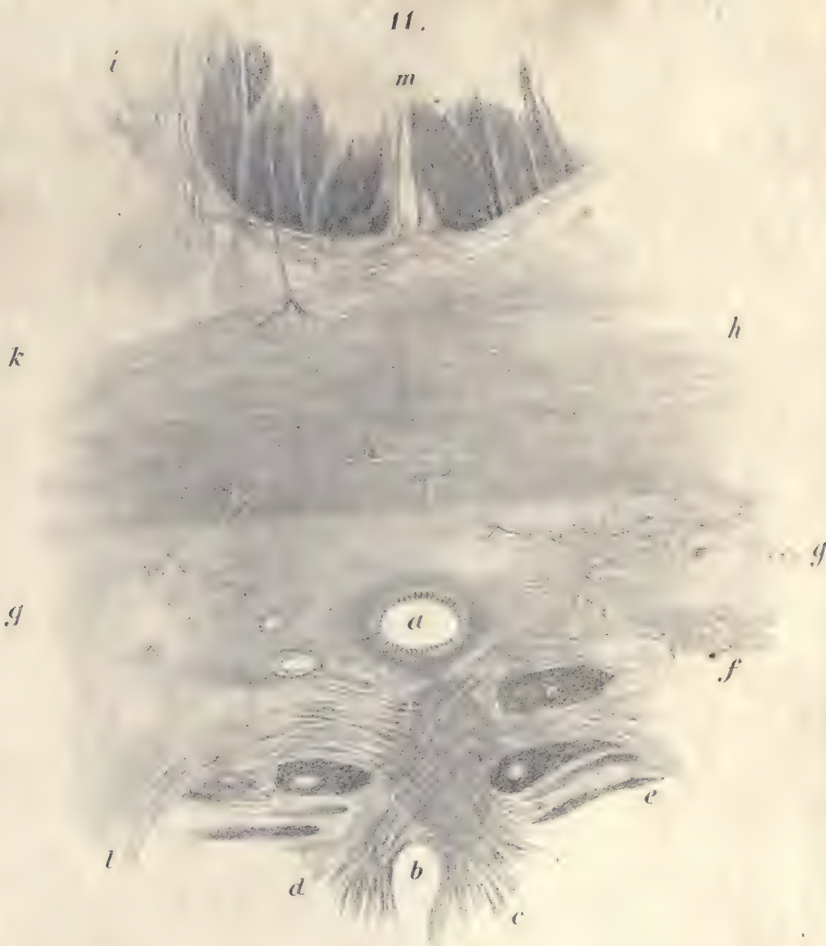


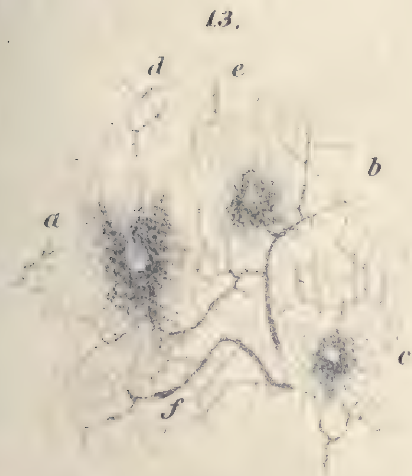
8.

c
b
a
l
i
i
h
h
g
g
k
m
k
h
f
e
d











J. L. C. Schroeder van der Kolk ad nat del.

Lith. v. Meijer & C° Amst.

NOTE

SUR UNE MÉTHODE POUR LA RÉDUCTION

D'INTÉGRALES DÉFINIES

ET SUR SON APPLICATION À

QUELQUES FORMULES SPÉCIALES.

PAR

D. BIERENS DE HAAN.

Publié par l'Académie Royale des Sciences à Amsterdam.



AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1855.

NOTE

SUR UNE MÉTHODE POUR LA RÉDUCTION

D'INTÉGRALES DÉFINIES

ET SUR SON APPLICATION À

QUELQUES FORMULES SPECIALES.

PAR

D. BIERENS DE HAAN.



1. Je prends pour données les formules trouvées par MM. Schlömilch et Arndt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{x+q} = -e^{pq}\, li.\,(e^{-pq}) = -e^{pq}\, Ei.(-pq) = a\,, \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{x-q} = -e^{-pq}\, li.\,(e^{pq}) = -e^{-pq}\, Ei.(pq) = b\,, \quad \ldots\ldots \quad (II)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{x^2+q^2} = \frac{1}{q}\left\{Ci.(pq)\,Sin.pq - Si.(pq)\,Cos.pq + \tfrac{1}{2}\pi\, Cos.pq\right\} = \frac{c}{q}, \quad . (III)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}x\,dx}{x^2+q^2} = -Ci.(pq)\,Cos.pq - Si.(pq)\,Sin.pq + \tfrac{1}{2}\pi\, Sin.\,pq = d. \quad . (IV)$$

Sur les deux premières on peut voir: Schlömilch dans ses *Beiträge zur Theorie der bestimmten Integrale* III, 5; dans ses *Analytische Studien* I, § 18, II, § 20, et Grunert's *Archif,* Bd. V, S. 204. — Arndt. Gr. *Arch.* Bd.

X, S. 247. — WINKLER. CRELLE'S *Journal*, Bd. XLV, S. 102. Et sur les deux dernières: SCHLÖMILCH dans ses *Anal. Stud.* II, § 21 et *Cr. Journal* Bd. XXXIII, S. 325. — ARNDT. GR. *Arch.* Bd. X, S. 225.

En outre nous aurons besoin de deux autres formules connues, savoir:

$$\int_0^\infty e^{-px} dx = \frac{1}{p}, \quad \ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

$$\int_0^\infty e^{-px} x^a dx \frac{1^{a/1}}{p^{a+1}} = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

Sur la première, qui se déduit aisément par l'intégration indéfinie, voyez: CISA DE GRÉSY. *Mém. de Turin,* 1821, p. 209. II, N°. 45. LIOUVILLE. *Journal de Liouville,* T. IV, p. 317. — OETTINGER. *Cr. Journ.* Bd. XXXV, S. 13. — Quant à la dernière, qui est due à Euler, on peut consulter ses *Instit. Calc. Int.* T. IV, Supp. V, p. 129, sqq. — LEGENDRE. *Exerc. de Calcul Intégral.* P. III, N°. 31. — POISSON. *Journal de l'École Polyt.* Cah. XIX, p. 404, N°. 68. — BINET. *Journ. de l'Éc. Pol.* Cah. XXVII, p. 123. — LEJEUNE-DIRICHLET. *Cr. Journ.* Bd. XV, S. 258. — OETTINGER. *Cr. Journ.* Bd. XXXV, S. 13. — SCHAAR. *Mém. de Brux.* 1848. — LOBATSCHEWSKY. *Mém. de Kasan,* 1835, p. 211 et 1836, p. 1, I form. (13).

La somme et la différence des formules (I) et (II) donnent:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} dx}{x^2 - q^2} = \frac{b-a}{2q} = \frac{1}{2q}\left\{e^{pq}\, Ei.(-pq) - e^{-pq}\, Ei.(pq)\right\}, \quad \ldots \quad \text{(VII)}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} x dx}{x^2 - q^2} = \frac{a+b}{2} = -\tfrac{1}{2}\left\{e^{pq}\, Ei.(-pq) + e^{-pq}\, Ei.(pq)\right\} \quad \ldots \quad \text{(VIII)}$$

Ces formules ont été trouvées par SCHLÖMILCH dans ses *Anal. Stud.* II, § 20 et par ARNDT, *Gr. Arch.* Bd. X, S. 247.

Les signes *li.*, *Ei.*, *Ci.* et *Si.* dénotent ici les fonctions transcendantes, connues sous les noms de logarithme intégral, exponentielle intégrale, sinus intégral et cosinus intégral, qui sont exprimées respectivement par les équations

$$li.(q) = \int_0^q \frac{dx}{1x} = A + \tfrac{1}{2}\, 1q^2 + \frac{1}{1}\frac{q}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{1.2} + \ldots,$$

$$Ei.(q) = -\int_{-}^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} = A + \tfrac{1}{4}\, 1q^4 + \frac{1}{1}\frac{1}{q} + \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{1.2} + \ldots,$$

$$Si.(q) = \int_0^q \frac{Sin.\, x\, dx}{x} = \frac{1}{1}\,\frac{q}{1} - \tfrac{1}{3}\,\frac{q^3}{1.2.3} + \tfrac{1}{5}\,\frac{q^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$Ci.(q) = \int_\infty^q \frac{Cos.\, x\, dx}{x} = \mathrm{A} + \tfrac{1}{1}\,\mathrm{l}\,q^1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{q^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\,\frac{q^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

La deuxième ne diffère de la première que dans le cas où q soit imaginaire: les deux dernières transcendantes sont introduites dans l'analyse par MM. Schlömilch et Arndt en même temps. A est la constante connue 0,5772156... déterminée déjà par Mascheroni. En outre j'ai employé pour les factorielles ou facultés numériques la notation de Kramp:

$$p^{a/q} = p \,.\, \overline{p+q} \,.\, \overline{p+2q} \ldots\ldots \overline{p+(a-1)\,q}.$$

2. Cherchons à présent les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} x^h\, dx}{x+q} = \mathrm{A}_h \,, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}\, dx}{(x+q)^k} = \mathrm{C}_k \,,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} x^h\, dx}{x-q} = \mathrm{B}_h \,, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}\, dx}{(x-q)^k} = \mathrm{D}_k \,.$$

Généralement on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} x^{h+1}\, dx}{x+q} = \int_0^\infty e^{-px} x^h\, dx - q \int_0^\infty \frac{e^{-px} x^h\, dx}{x+q}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} x^{h+1}\, dx}{x-q} = \int_0^\infty e^{-px} x^h\, dx + q \int_0^\infty \frac{e^{-px} x^h\, dx}{x-q}\,;$$

ou bien

$$\mathrm{A}_{h+1} = \frac{1^{h/1}}{p^{h+1}} - q\,\mathrm{A}_h\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$\mathrm{B}_{h+1} = \frac{1^{h/1}}{p^{h+1}} + q\,\mathrm{B}_h\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

En appliquant cette réduction, on obtient successivement

$$\mathrm{A}_1 = -\,aq + \frac{1}{p}\,,$$

$$\mathrm{A}_2 = +\,aq^2 + \frac{1-pq}{p^2}\,,$$

$$A_3 = -aq^3 + \frac{1.2 - pq + p^2q^2}{p^3},$$

$$A_4 = +aq^4 + \frac{1.2.3 - 1.2.pq + p^2q^2 - p^3q^3}{p^4};$$

donc en général

$$A_h = a(-q)^h + \frac{1}{p^h}\sum_1^h 1^{h-n/1}(-pq)^{n-1}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

et de la même manière

$$B_h = b\,(q)^h + \frac{1}{p^h}\sum_1^h 1^{h-n/1}(pq)^{n-1}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

ce qui s'accorde avec les formules de réduction générales.

Pour les deux intégrales C et D le même chemin ne nous mène pas au but: il faut avoir recours à une autre réduction, qui est, si je ne me trompe, aussi féconde dans ses résultats, qu'elle est simple et surtout qu'elle est sûre dans son application et dans sa déduction.

3. La méthode connue d'intégration, dite par parties, est donnée par cette formule

$$d_x\,\{f(x).\varphi(x)\} = \varphi(x).d_x\,\{f(x)\} + f(x).d_x\{\varphi(x)\},$$

d'où

$$\varphi(x).d_x\,\{f(x)\} = d_x.\{f(x).\varphi(x)\} - f(x).d_x\{\varphi(x)\}.$$

Intégrons cette formule entre les limites a et b, nous obtiendrons

$$\int_a^b \varphi(x).d_x\,\{f(x)\}\,dx = \int_a^b d_x.\{f(x).\varphi(x)\}\,dx - \int_a^b f(x).d_x.\{\varphi(x)\}\,dx.$$

La deuxième de ces intégrales est facile à déterminer, puisque l'on n'a besoin d'aucune intégration: elle est $f(b).\varphi(b) - f(a).\varphi(a)$, sans constante, parce que celle-ci se détruit, lorsqu'on prend la différence des valeurs de l'intégrale pour les deux limites, dans la supposition toutefois que les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ restent continues entre ces deux limites. On a donc enfin

$$\int_a^b \varphi(x).d_x\,\{f(x)\}\,dx = f(b).\varphi(b) - f(a).\varphi(a) - \int_a^b f(x).d_x\,\{\varphi(x)\}\,dx \quad \ldots \quad (A)$$

Quand les termes intégrés peuvent se déterminer exactement, sans rester indéterminés, comme il peut arriver fréquemment, et que de plus la première intégrale soit connue, la seconde s'en déduit directement, entre les mêmes limites, qui valent pour la première. Il est de rigueur que les termes intégrés aient une valeur déterminée: pour les cas ordinaires des limites 0 et 1, 0 et ∞, 1 et ∞ etc., il arrive souvent, que ces produits se trouvent sous la forme indéterminée $0:0$, $\infty:\infty$, $0.\infty$; mais dans ces cas l'on peut toujours s'assurer par les règles ordinaires et connues, si leur valeur soit vraiment indéterminée, ou si elle puisse se réduire à quelque valeur déterminée. Il est presque superflu d'ajouter la remarque, que la discontinuité de la fonction $f(x).\varphi(x)$ pour quelque valeur c de x entre les limites a et b nécessite la correction

$$\text{Lim.}\ \left[f(c-\varepsilon)\varphi(c-\varepsilon)-f(c+\varepsilon)\varphi(c+\varepsilon)\right]$$

pour la limite zéro de ε. Bien que ce cas de discontinuité ait lieu quelquefois auprès des intégrales, que nous allons étudier, la valeur de cette correction est toujours nulle: afin de ne pas troubler l'ordre du raisonnement à chaque instant, la discussion rélative a été renvoyée à la fin.

Sous cette forme (A), je dis que cette formule est capable de donner un grand nombre d'intégrales définies, et premièrement qu'elle peut quelquefois fournir des intégrales, que l'on cherche ordinairement par la méthode de la différentiation par rapport à une constante sous le signe d'intégration définie; méthode qui, dans son application usuelle, n'est certainement pas toujours rigoureuse, et qui est exposée en outre à de graves inconvénients, que l'on ne rencontre pas auprès de notre formule. En second lieu cette transformation peut introduire une nouvelle fonction sous le signe d'intégration définie, ce qui donne des résultats non moins intéressants.

Bien que quelquefois on ait fait usage d'une réduction semblable dans le cours du calcul de quelque intégrale définie, je ne me rappelle pas, qu'on en ait fait autant de cas, qu'elle semble mériter. Je vais tâcher de faire voir dans la suite, qu'en effet elle donne beaucoup de formules utiles et surtout générales d'intégrales définies. J'en ai fait un usage fréquent dans la déduction de nouvelles intégrales définies dans les tables de ces fonctions, que je suis occupé de rediger, sans toutefois avoir été aussi loin que dans cette Note, et m'arrêtant le plus souvent, lorsque j'avais à recourir à des sommations.

On a donc le

Théorème I. Si dans une intégrale définie $\int_a^b F(x) \,.\, dx$, la fonction $F(x)$ peut être mise sous la forme d'un produit, tel que l'un des facteurs soit la différentielle d'une fonction connue quelconque, c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$F(x) = \varphi(x) \,.\, d_x \,.\, \{f(x)\} ,$$

on aura aussi l'équation

$$\int_a^b \varphi(x) \,.\, d_x \,.\, \left\{f(x)\right\} dx = \varphi(b) \,.\, f(b) - \varphi(a) \,.\, f(a) - \int_a^b f(x) \,.\, d_x \,.\, \left\{\varphi(x)\right\} dx \,.$$

Quoique dans le cours de cette Note on ne fera usage que de ce théorème, il vaudra bien la peine pourtant d'en tirer un corollaire intéressant, en y appliquant la méthode d'intégration par rapport à une constante sous le signe d'intégration définie. A cet effet prenons q pour la variable, le théorème précédent nous fournira l'équation

$$\int_\alpha^\beta \varphi(q,x) \,.\, d_q \,.\, \left\{f(q,x)\right\} \,.\, dq = \varphi(\beta,x) \,.\, f(\beta,x) - \varphi(\alpha,x) \,.\, f(\alpha,x) - \int_\alpha^\beta f(q,x) \,.\, d_q \,.\, \left\{\varphi(q,x)\right\} \,.\, dq \,;$$

tandis que la méthode mentionnée est comprise, dans le cas général, sous la formule :

$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b F(y,z)\, dz = \int_a^b dz \int_\alpha^\beta F(y,z)\, dy - \Delta ,$$

où Δ est la correction, qu'il faut ajouter en divers cas de discontinuité. Prenons dans cette formule q et x au lieu de y et z: nous aurons

$$\int_\alpha^\beta dq \int_a^b F(q,x)\, dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta F(q,x)\, dq - \Delta .$$

Supposons en outre que $F(q,x)$ soit de la forme $\varphi(q,x) \,.\, d_q \{f(q,x)\}$, et nous trouverons enfin par la substitution de la première équation

$$\int_\alpha^\beta dq \int_a^b \varphi(q,x) \,.\, d_q \left\{f(q,x)\right\} dx = \int_a^b dx \left[\varphi(\beta,x) \,.\, f(\beta,x) - \varphi(\alpha,x) \,.\, f(\alpha,x)\right] - \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(q,x) \,.\, d_q \,.\, \left\{\varphi(q,x)\right\} dq - \Delta \,.\,. \text{(B)}$$

Il s'en suit donc le

Théorème II. Lorsque dans une intégrale définie $\int_a^b F\,(q\,,x)\,dx$ la fonction $F(q\,,x)$ peut être mise sous la forme d'un produit, tel que l'un des facteurs soit la différentielle d'une fonction connue quelconque de q, c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$F(q,x) = \varphi(q,x)\,d_q\left\{f(q,x)\right\},$$

on aura aussi l'équation

$$\int_\alpha^\beta dq \int_a^b \varphi(q,x).d_q.\left\{f(q,x)\right\}dx = -\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(q,x).d_q\left\{\varphi(q,x)\right\}dq - \Delta$$
$$+\int_a^b dx\left[\varphi(\beta,x).f(\beta,x) - \varphi(\alpha,x).f(\alpha,x)\right];$$

où Δ est la correction nécessaire dans certains cas de discontinuité de la fonction $F(a,x)$ — pour des valeurs de q et de x, qui tombent entre les limites respectives incluses, α et β, a et b, — lors de l'application de la méthode du changement dans l'ordre des intégrations. Toutefois ce résultat ne peut valoir que sous la double condition, à laquelle ce changement est soumis, savoir que

$$y = \tfrac{1}{2}\,\text{Lim.}\,\varepsilon\,\frac{d^2.F(q,x)}{dq^2} \quad \text{et} \quad \text{Lim.}\int_a^b y\,dx$$

soient toutes deux nulles.

Comme pour le Théorème I il faut observer, qu'on a supposé que $\varphi(q,x).f(q,x)$ soit continu entre les limites α et β de q: lorsque cela ne serait plus le cas, il faudrait ajouter au second membre de cette équation la correction

$$\text{Lim.}\int_\alpha^\beta\left[f(c-\varepsilon).\varphi(c-\varepsilon) - f(c+\varepsilon).\varphi(c+\varepsilon)\right].$$

4. A l'aide de cette méthode les intégrales C et D se déduisent aisément. Nous pouvons appliquer le théorème ici de trois manières différentes, savoir

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{(x+q)^k} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(x+q)^k}d.x = \left.\frac{x\,e^{-px}}{(x+q)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty x\left\{\frac{-pe^{-px}dx}{(x+q)^k} + e^{-px}\frac{-k\,dx}{(x+q)^{k+1}}\right\}$$
$$= \left.\frac{x\,e^{-px}}{(x+q)^k}\right\}_0^\infty + \int_0^\infty e^{-px}dx\left\{\frac{p}{(x+q)^{k-1}} + \frac{k-pq}{(x+q)^k} - \frac{kq}{(x+q)^{k+1}}\right\},$$

$$-p\int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{(x+q)^k} = \int_0^\infty \frac{1}{(x+q)^k}\,d.e^{-px} = \frac{e^{-px}}{(x+q)^k}\Bigg\}_0^\infty - \int_0^\infty e^{-px}dx\,\frac{-k}{(x+q)^{k+1}},$$

$$-k\int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{(x+q)^{k+1}} = \int_0^\infty e^{-px}d.\frac{1}{(x+q)^k} = \frac{e^{-px}}{(x+q)^k}\Bigg\}_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{(x+q)^k}.-pe^{-px}dx.$$

Ici, comme partout dans la suite, la notation: $F(x)\Big\}_a^b$ signifie, que l'on doit prendre la fonction $F(x)$ entre les limites a et b. Voyons d'abord ce que deviennent ici les termes déjà intégrés, dont les deux derniers sont égaux. Pour la limite a de x ils sont

$$\frac{xe^{-px}}{(x+q)^k} = \frac{o\,.\,1}{q^k} = o \quad \text{et} \quad \frac{e^{-px}}{(x+q)^k} = \frac{1}{q^k}.$$

Pour l'autre limite ∞ de x ils s'offrent sous la forme

$$\frac{xe^{-px}}{(x+q)^k} = \frac{\infty\,.\,o}{\infty^k} = o\,,\ \text{pour } k \geqq 1\,,\qquad \frac{e^{-px}}{(x+q)^k} = \frac{o}{\infty} = o\,,\ \text{pour } k > o\,.$$

Donc ces termes, quoiqu'en partie ils semblent indéterminés, sont en vérité o ou q^{-k}. Donc les équations deviennent, après la séparation des intégrales, réunies par les signes + ou —,

$$C_k = pC_{k-1} + (k-pq)\,C_k - kq\,C_{k+1}\,,$$

ou bien

$$kq\,C_{k+1} = pC_{k-1} - (pq-k+1)\,C_k\,,\ k \geqq 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

et

$$\left.\begin{aligned} -pC_k &= -\frac{1}{q^k} + kC_{k+1}\,, & k>0 \\ -kC_{k+1} &= -\frac{1}{q^k} + pC_k\,, & k>0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

dont les deux dernières coincident. Dans l'application la formule (*d*) sera la plus facile: en tous cas on trouve, parceque $C_0 = \frac{1}{p}$, $C_1 = a$:

$$C_2 = -ap + \frac{1}{q}\,,$$

$$C_3 = \frac{ap^2}{2} + \frac{1-pq}{2q^2}\,,$$

$$C_4 = -\frac{ap^3}{2.3} + \frac{2 - pq + p^2 q^2}{2.3\,q^3},$$

$$C_5 = \frac{ap^4}{2.3.4} + \frac{2.3 - 2pq + p^2 q^2 - p^3 q^3}{2.3.4.q^4};$$

donc en général

$$C_k = \frac{(-p)^{k-1}}{1^{k-1/1}}\,a + \frac{1}{1^{k-1/1}\,q^{k-1}} \sum_1^{k-1} 1^{k-n-1/1}\,(-pq)^{n-1} \quad \ldots . \quad (3)$$

en accord avec les deux formules générales de réduction. On trouverait de même

$$D_k = \frac{(-p)^{k-1}}{1^{k-1/1}}\,b + \frac{1}{1^{k-1/1}\,(-q)^{k-1}} \sum_1^{k-1} 1^{k-n-1/1}\,(pq)^{n-1} \quad \ldots . \quad (4)$$

5. Restent encore les intégrales analogues

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^h\,dx}{(x+q)^k} = E_{h,k}\ , \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^h\,dx}{(x-q)^k} = F_{h,k},$$

qui ne sont pas aussi simples. En premier lieu notre méthode donne ici d'un triple point de vue

$$(h+1)\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^h\,dx}{(x+q)^k} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(x+q)^k}\,d.x^{h+1} = \left.\frac{e^{-px}\,x^{h+1}}{(x-q)^k}\right\}_0^\infty$$
$$- \int_0^\infty x^{h+1}\left\{\frac{-p\,e^{-px}\,dx}{(x+q)^k} + e^{-px}\frac{-k\,dx}{(x+q)^{k+1}}\right\};$$

$$-p\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^{h+1}\,dx}{(x+q)^k} = \int_0^\infty \frac{x^{h+1}}{(x+q)^k}\,d.e^{-px} = \left.\frac{e^{-px}\,x^{h+1}}{(x+q)^k}\right\}_0^\infty$$
$$- \int_0^\infty e^{-px}\left\{\frac{(h+1)\,x^h\,dx}{(x+q)^k} + x^{h+1}\frac{-k\,dx}{(x+q)^{k+1}}\right\};$$

$$-k\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^{h+1}\,dx}{(x-q)^{k+1}} = \int_0^\infty e^{-px}\,x^{h+1}\,d.\frac{1}{(x+q)^k} = \left.\frac{e^{-px}\,x^{h+1}}{(x+q)^k}\right\}_0^\infty$$
$$- \int_0^\infty \frac{1}{(x+q)^k}\left\{-p\,e^{-px}\,x^{h+1}\,dx + (h+1)\,x^h\,e^{-px}\,dx\right\}.$$

Les termes déjà intégrés, qui ici sont les mêmes dans les trois formules,

donnent pour la limite $x = 0$, $\frac{1 \, . \, 0}{q^k} = 0$; mais pour la limite supérieure $x = \infty$, ils semblent indéterminés, vid. $\frac{0 \, . \infty^{h+1}}{\infty^k}$. Voyons ce qui en est et mettons les sous la forme $\frac{x^{h+1}}{e^{px}(x+q)^k}$. Nous aurons
$\frac{x^{h+1}}{e^{px}(x+q)^k} = \frac{(h+1)\,x^h}{e^{px}\{p(x+q)^k + k(x+q)^{k-1}\}}$. Donc la puissance diminue de dégré dans le numérateur, jusqu'à ce que l'on aura $1^{h+1/1}$; dans le dénominateur on aura alors

$$e^{px}\{p^h(x+q)^k + \ldots\ldots + \ldots (x+q)^{k-h}\}$$

si $k > h$; dans le cas contraire le dernier terme est $(x+q)^0$. Ce polynome est infini pour $x = \infty$, e^{px} est de même infini: donc la fraction est devenue $\frac{0}{\infty \, . \, \infty}$ bien certainement zéro. Les équations deviennent ainsi:

$$(h+1)\,E_{h,k} = p\,E_{h+1,k} + k\,E_{h+1,k+1},$$
$$-\,p\,E_{h+1,k} = -\,(h+1)\,E_{h,k} + k\,E_{h+1,k+1},$$
$$-\,k\,E_{h+1,k+1} = p\,E_{h+1,k} - (h+1),\,E_{h,k}.$$

Ces trois équations sont donc identiques, et l'on a en général

$$(k-1)\,E_{h,k} = -\,p\,E_{h,k-1} + h\,E_{h-1,k-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

En application elle donne

$$E_{h,1} = A_h,$$
$$E_{h,2} = -\,p\,A_h + h\,A_{h-1},$$
$$E_{h,3} = \tfrac{1}{2}(-pE_{h,2} + hE_{h-1,2}) = \tfrac{1}{2}(p^2A_h - 2p\,.\,hA_{h-1} + h\,.\,(h-1)\,A_{h-2},$$
$$E_{h,4} = \tfrac{1}{2,3}(-p\,E_{h,3} + h\,E_{h-1,3}) = \tfrac{1}{2,3}(-p^3A_h + 3p^2\,h\,A_{h-1} - 3p\,.\,h\,(h-1)\,A_{h-2} + h\,.\,(h-1)\,(h-2)\,A_{h-3});$$

donc en général

$$E_{h,k+1} = \frac{1}{1^{k/1}} \sum_{o}^{k} 1^{k-m/1} \binom{h}{k.m} \binom{k}{m} (-p)^m A_{h-k+m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

où $\binom{x}{y}$ est la notation usuelle pour le coefficient à index y de la puissance

$x^{\text{ième}}$. Mais cette formule a le grave inconvénient d'obliger à recourir à $k + 1$ valeurs différentes de A: l'on ne peut y remédier, qu'en perdant la forme simple, obtenue jusqu'ici. Car en vertu de (a) on a

$$q\,A_{h-1} = \frac{1^{h-1/1}}{p^h} - A_h;$$

Substituons cette valeur dans l'équation pour $E_{h,2}$ et il ne reste que A_h et une quantité déterminée, non fonction de A_h: donc tous les $E_{h,k}$ peuvent se déterminer de la même manière. Par le calcul on trouve en effet

$$E_{h,2} = \frac{1^{h/1}}{p^h}\frac{1}{q} - \frac{pq+h}{q}\,A_h,$$

$$E_{h,3} = -\frac{1^{h/1}}{p^h}\frac{pq+h-1}{1.2.q^2} + \frac{p^2q^2+h.2pq+h.(h-1)}{1.2.q^2}\,A_h,$$

$$E_{h,4} = \frac{1^{h/1}}{p^h}\frac{pq+\big(p^2q^2+(h-1)2pq+(h-1).(h-2)\big)}{1.2.3.q^3} - \frac{p^3q^3+h.3p^2q^2+h.(h-1)3pq+h.(h-1)(h-2)}{1.2.3.q^3}\,A_h.$$

L'acte de progression dans le coefficient de A_h est facile à saisir: nous ne transcrirons donc dorénavant que le premier terme, comme suit:

$$E_{h,5} = -\frac{1^{h/1}}{p^h}\frac{2pq(pq+h-2)+\big(p^3q^3+(h-1)\,3p^2q^2+(h-1)(h-2).3pq+(h-1).(h-2).(h-3)\big)}{1.2.3.4.q^4} + \&c.$$

$$E_{h,6} = \frac{1^{h/1}}{p^h}\frac{2p^2q^2+3pq\big(p^2q^2+(h-2).2pq+(h-2).(h-3)\big)+\big(p^4q^4+(h-1).4p^3q^3+\text{etc.}\big)}{1.2.3.4.5.q^5} - \&c.$$

$$E_{h,7} = -\frac{1^{h/1}}{p^h}\frac{3.2p^2q^2(pq+h-3)+4pq\big(p^3q^3+(h-2)3p^2q^2+(h-2).(h-3)3pq+(h-2).(h-3).(h-4)\big)+\big(p^5q^5+\text{etc.}\big)}{1.2.3.4.5.6.q^6} + \&$$

$$E_{h,8} = \frac{1^{h/1}}{p^h}\frac{2.3\,p^3q^3+6.2p^2q^2\big(p^2q^2+(h-3).2pq+(h-3).(h-4)\big)+5pq\big(p^4q^4+(h-2)4p^3q^3+\text{etc.}\big)+\big(p^6q^6+\text{etc.}\big)}{1.2.3.4.5.6.7.q^7} - \&$$

$$E_{h,9} = -\frac{1^{h/1}}{p^h}\frac{4.2.3p^3q^3(pq+h-4)+10.2p^2q^2\big(p^3q^3+(h-3)3p^2q^2+\text{etc.}\big)+6pq\big(p^5q^5+(h-2)5p^4q^4+\text{etc.}\big)+\big(p^7q^7+\text{etc.}\big)}{1.2.3.4.5.6.7.8.q^8} + \&$$

d'où l'on pourra juger de l'acte de progression dans le premier terme: donc on aura en général

$$E_{h,k+1} = \frac{A_h}{1^{k/1}(-q)^k}\sum_{1}^{k} 1^{k-m/1}\binom{h}{k-m}\binom{k}{m}(pq)^m +$$

$$+ \frac{1}{p^h(-q)^k}\frac{1^{h/1}}{1^{k/1}}\Big[\sum_1^k 1^{k-m/1}\binom{h-1}{k-m}\binom{k-1}{m-1}(pq)^{m-1} + \binom{k-2}{1}pq\sum_3^k 1^{k-m/1}\binom{h-2}{k-m}\binom{k-3}{m-3}(pq)^{m-3}$$

$$+ \binom{k-3}{2}1^{2/1}p^2q^2\sum_5^k 1^{k-m/1}\binom{h-3}{k-m}\binom{k-5}{m-5}(pq)^{m-5}$$

$$+ \binom{h-4}{3}1^{3/1}p^3q^3\sum_7^k 1^{k-m/1}\binom{h-4}{k-m}\binom{k-7}{m-7}(pq)^{m-7} + \&c.\Big] \quad . \; . \; . \quad (6)$$

où les coefficients du binôme ne valent que pour des valeurs positives de $k - l$: celles, où $k < l$, étant nulles.

$$F_{h,k+1} = \frac{1}{1^{k/1}}\sum_0^k 1^{k-m/1}\binom{h}{k-m}\binom{k}{m}(p)^m B_{h-k+m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$F_{h,k+1} = \frac{B_h}{1^{k/1}q^k}\sum_1^k 1^{k-m/1}\binom{h}{k-m}\binom{k}{m}(-pq)^m$$

$$+ \frac{1}{p^hq^k}\frac{1^{h/1}}{1^{k/1}}\Big[\sum_1^k 1^{k-m/1}\binom{h-1}{k-m}\binom{k-1}{m-1}(-pq)^{m-1} - \binom{k-2}{1}pq\sum_3^k 1^{k-m/1}\binom{h-2}{k-m}\binom{k-3}{m-3}(-pq)^{m-3}$$

$$+ \binom{k-3}{2}1^{2/1}p^2q^2\sum_5^k 1^{k-m/1}\binom{h-3}{k-m}\binom{k-5}{m-5}(-pq)^{m-5} - \&c.\Big] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \quad (8)$$

En effet, on voit que les formules (6), (8) ne sont pas aussi simples que (5), (7), mais en révanche, elles ne contiennent que le seul A_h ou B_h, qui se substitue aisément des formules (1) et (2).

6. Passons aux intégrales, dont le dénominateur est de la forme $(x^2 - q^2)^k$. L'équation de réduction

$$\int_0^\infty \frac{x^{h+2}e^{-px}dx}{(x^2-q^2)^{k+1}} = \int_0^\infty \frac{x^h e^{-px}dx}{(x^2-q^2)^k} + q^2\int_0^\infty \frac{x^h e^{-px}dx}{(x^2-q^2)^{k+1}}$$

nous apprend d'abord, que ces intégrales se divisent en deux classes, savoir à exponent h pair ou impair, de telle sorte que les intégrales d'une de ces classes se déterminent à l'aide d'intégrales de la même classe seulement. Les intégrales, que nous avons à étudier, sont donc les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^{2h}dx}{x^2-q^2} = G_{2h} \quad , \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{(x^2-q^2)^k} = H_k \; , \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}x^{2h}dx}{(x^2-q^2)^k} = K_{h,k}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^{2h+1}dx}{x^2-q^2} = G_{2h+1} \; , \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}x\,dx}{(x^2-q^2)^k} = I_k \quad , \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}x^{2h+1}dx}{(x^2-q^2)^k} = L_{h,k}.$$

Pour les deux premières on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} x^h dx}{x^2 - q^2} = \int_0^\infty e^{-px} x^{h-2} dx + q^2 \int_0^\infty \frac{e^{-px} x^{h-2} dx}{x^2 - q^2}$$

ou bien

$$G_{2h} = \frac{1^{2h-2/1}}{p^{2h-1}} + q^2 G_{2h-2} \quad , \quad G_{2h+1} = \frac{1^{2h-1/1}}{p^{2h}} + q^2 G_{2h-1}; \quad . \quad (f)$$

ce qui donne en application

$G_0 = \frac{1}{2q}(b-a)$, ... Voir (VII) $\qquad G_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, ... Voir (VIII)

$G_2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{2} q (b-a)$, $\qquad G^3 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2} q^2 (a+b)$,

$G_4 = \frac{1^{2/1}}{p^3} + \frac{q^2}{p} + \frac{1}{2} q^3 (b-a)$, $\qquad G^5 = \frac{1^{3/1}}{p^4} + \frac{q^2}{p^2} + \frac{1}{2} q^4 (a+b)$,

$G_6 = \frac{1^{h/1}}{p^5} + \frac{1^{2/1} q^2}{p^3} + \frac{q^4}{p} + \frac{1}{2} q^5 (b-a)$, $G^7 = \frac{1^{5/1}}{p^6} + \frac{1^{3/1} q^2}{p^4} + \frac{q^4}{p^2} + \frac{1}{2} q^6 (a+b)$;

donc en général

$$G_{2h} = \frac{1}{2} q^{2h-1} (b-a) + \frac{1}{p^{2h-1}} \sum_1^h 1^{2h-2n/1} (p^2 q^2)^{n-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

$$G_{2h+1} = \frac{1}{2} q^{2h} (b+a) + \frac{1}{p^{2h}} \sum_1^h 1^{2h-2n+1/1} (p^2 q^2)^{n-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Quant à ces intégrales, on peut rémarquer, qu'on aurait pu les déduire des formules (1) et (2) par les rélations:

$$A_{2h} + B_{2h} = 2 G_{2h+1} \quad , \quad B_{2h} - A_{2h} = 2q G_{2h},$$

$$A_{2h-1} + B_{2h-1} = 2 G_{2h} \quad , \quad B_{2h-1} - A_{2h-1} = 2q G_{2h-1};$$

d'où

$$G_{2h} = \frac{1}{2q} \left\{ B_{2h} - A_{2h} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ B_{2h-1} + A_{2h-1} \right\},$$

$$G_{2h+1} = \frac{1}{2q} \left\{ B_{2h+1} - A_{2h+1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ B_{2h} + A_{2h} \right\}.$$

7. Pour les deux suivantes H_k et I_k, il faut avoir recours au Théorème I de N°. 3. Comme dans N°. 4, on aura ici

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(x^2-q^2)^k} d.x = \left.\frac{x e^{-px}}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty x \left\{\frac{-p e^{-px} dx}{(x^2-q^2)^k} + e^{-px}\frac{-k.2x dx}{(x^2-q^2)^{k+1}}\right\}$$

$$= \left.\frac{x e^{-px}}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty + \int_0^\infty e^{-px} dx \left\{\frac{px}{(x^2-q^2)^k} + \frac{2k}{(x^2-q^2)^k} + \frac{2kq^2}{(x^2-q^2)^{k+1}}\right\},$$

ou bien

$$(1-2k)\int_0^\infty \frac{e^{-px} dx}{(x^2-q^2)^k} = \left.\frac{x e^{-px}}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty + \int_0^\infty e^{-px} dx \left\{\frac{px}{(x^2-q^2)^k} + \frac{2kq^2}{(x^2-q^2)^{k+1}}\right\};$$

$$\int_0^\infty \frac{x e^{-px}}{(x^2-q^2)^k} d.x = \left.\frac{x^2 e^{-px}}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty x \left\{\frac{-p e^{-px} x + e^{-px}}{(x^2-q^2)^k} dx + x e^{-px} \frac{-k.2x dx}{(x^2-q^2)^{k+1}}\right\}$$

$$= \left.\frac{x^2 e^{-px}}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty + \int_0^\infty e^{-px} dx \left\{\frac{p}{(x^2-q^2)^{k-1}} + \frac{pq^2}{(x^2-q^2)^k} + \frac{(2k-1)x}{(x^2-q^2)^k} + \frac{2kq^2 x}{(x^2-q^2)^{k+1}}\right\}:$$

si l'on voulait prendre $2\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(x^2-q^2)^k} x\, dx = \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(x^2-q^2)^k} d.x^2$ ou retrouverait la dernière équation elle-même.

$$-p\int_0^\infty \frac{e^{-px} dx}{(x^2-q^2)^{k-1}} = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2-q)^{2k-1}} d.e^{-px} = \left.\frac{e^{-px}}{(x^2-q)^{2k-1}}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty e^{-px} \frac{-(k-1)2x dx}{(x^2-q^2)^k},$$

$$-p\int_0^\infty \frac{e^{-px} x dx}{(x^2-q^2)^k} = \int_0^\infty \frac{x}{(x^2-q^2)^k} d.e^{-px} = \left.\frac{x e^{-px}}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty e^{-px} dx \left\{\frac{1}{(x^2-q^2)^k} + x\frac{-k.2x}{(x^2-q^2)^{k+1}}\right\}$$

$$= \left.\frac{x e^{-px}}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty + \int_0^\infty e^{-px} dx \left\{\frac{2k-1}{(x^2-q^2)^k} + \frac{2kq^2}{(x^2-q^2)^{k+1}}\right\},$$

$$-2k\int_0^\infty \frac{e^{-px} x dx}{(x^2-q^2)^{k+1}} = \int_0^\infty e^{-px} d.\frac{1}{(x^2-q^2)^k} = \left.\frac{e^{-px}}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{(x^2-q^2)^k} (-p e^{-px} dx),$$

$$-2k\int_0^\infty \frac{e^{-px} x^2 dx}{(x^2-q^2)^{k+1}} = \int_0^\infty x e^{-px} d\frac{1}{(x^2-q^2)^k} = \left.\frac{x e^{-px}}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{(x^2-q^2)^k}\left\{e^{-px} + x.(-p e^{-px})\right\} dx,$$

mais aussi $$\int_0^\infty \frac{e^{-px} x^2 dx}{(x^2-q^2)^{k+1}} = q^2\int_0^\infty \frac{e^{-px} dx}{(x^2-q^2)^{k+1}} + \int_0^\infty \frac{e^{-px} dx}{(x^2-q^2)^k}.$$

Dans ces six équations on a des termes intégrés $\frac{e^{-px}}{(x^2-q^2)^a}$ et $\frac{x^b e^{-px}}{(x^2-q^2)^a}$.

Pour la limite inférieure $x = 0$, ils deviennent respectivement $\frac{1}{(-q^2)^a}$ et 0.

Pour la limite supérieure $x = \infty$, le premier est $\frac{1}{e^{\infty} \infty^a} = \frac{1}{\infty} = 0$, et le second semble être indéterminé de la forme $\frac{\infty^b 0}{\infty^a}$: mais si on le met sous la forme $\frac{x^b}{e^{-px}(x^2-q^2)^a}$, et si l'on différentie le numérateur et le dénominateur de cette fraction, il vient:

$$\frac{b x^{b-1}}{pe^{px}(x^2-q^2)^a + e^{-px} a (x^2-q^2)^{a-1} 2x} = \frac{bx^{b-1}}{e^{px}(x^2-q^2)^{a-1}} (px^2 + 2ax - p^2 q^2).$$

Le degré du numérateur s'est abaissé d'une unité, celui du dénominateur n'a pas diminué: en réitérant cette différentiation, le numérateur devient à la fin $1^{b/1}$ et alors la fraction a la valeur

$$\frac{1^{b/1}}{e^{\infty} \infty^a} = \frac{1^{b/1}}{\infty . \infty} = 0.$$

Ce raisonnement exige que a soit $\geqq 0$, c'est-à-dire $k \geqq 1$.

A présent la première, la quatrième et la sixième des équations trouvées donnent:

$$0 = p\mathrm{I}_k + (2h-1)\mathrm{H}_k + 2kq^2 \mathrm{H}_{k+1} \quad \ldots\ldots\ldots (g')$$

la seconde donne:

$$p\mathrm{H}_{k-1} + pq^2 \mathrm{H}_k + 2(k-1)\mathrm{I}_k + 2kq^2 \mathrm{I}_{k+1} = 0;$$

la troisième et la cinquième enfin:

$$\frac{1}{(-q^2)^k} = p\mathrm{H}_k + 2k\mathrm{I}_{k+1} \quad \ldots\ldots\ldots (h')$$

Par la substitution de la dernière dans l'avant-dernière de ces formules on obtient une équation identique. Il nous reste donc les deux autres, qui doivent servir réciproquement à éliminer les I ou les H: de sorte que nous trouvons

$$4q^2 . k . k-1 . H_{k+1} = \frac{-p}{(-q^2)^{k+1}} - 2 . k-1 . 2k-1 . H_k + p^2 H_{k-1} \quad . \quad . \quad (g)$$

$$4q^2 . k . k-1 . I_{k+1} = \frac{-1}{(-q^2)^{k+1}} - 2 . k-1 . 2k-3 . I_k + p^2 I_{k-1} \quad . \quad . \quad (h)$$

Or, nous avons

$$H_0 = \frac{1}{p}, \quad H_1 = \frac{b-a}{2q}, \qquad I_0 = \frac{1}{p^2}, \quad I_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Donc il nous faut encore H_2 et I_2 pour pouvoir faire usage des formules (g) et (h), qui valent seulement pour $k \geqq 1$. Les formules (g') et (h') nous aideront ici en donnant pour $k = 1$:

$$-2q^2 H_2 = 1 . H_1 + pI_1 = \frac{b-a}{2q} + \frac{a+b}{2} p,$$

$$-2I_2 = \frac{1}{(-q^2)^1} + pH_1 = \frac{-1}{q^2} + \frac{b-a}{2a} p;$$

donc

$$H_2 = \frac{b-a}{2q} \frac{1}{2(-q^2)} + \frac{a+b}{2(-q^2)} \frac{p}{2}, \quad I_2 = -\frac{1}{2(-q^2)} - \frac{b-a}{2q} \frac{p}{2}.$$

Le calcul de (g) et (h) nous donne à présent successivement:

$$H_3 = \frac{1}{4(-q^2)^2} \left\{ p + \frac{p^2q^2+3}{(-q^2)} \frac{b-a}{2q} + 3p(a+b) \right\},$$

$$H_4 = \frac{1}{24(-q^2)^3} \left\{ 6p + \frac{6p^2q^2+30}{(-q^2)} \frac{b-a}{2q} + (p^2q^2+15)p(a+b) \right\},$$

$$H_5 = \frac{1}{96(-q^2)^4} \left\{ p(p^2q^2+88) + \frac{p^4q^4+45p^2q^2+210}{(-q^2)} \frac{b-a}{2q} (10p^2q^2+105)p(a+b) \right\},$$

. . . .

$$I_3 = \frac{1}{2(-q^2)} \left\{ \frac{2}{(-q^2)} - p^2 \frac{a+b}{2} + p \frac{b-a}{2q} \right\},$$

$$I_4 = \frac{1}{12(-q^2)^2} \left\{ \frac{p^2q^2+26}{-q^2} - 6p^2 \frac{a+b}{2} - (p^2q^2-12)p \frac{b-a}{2q} \right\}$$

. . . .

Vu la complication des formules (g) et (h), l'on ne pourra mettre la valeur générale de H_k et I_k sous une forme assez simple pour pouvoir en faire usage.

8. Le Théorème I du N°. 3 nous fournira ensuite pour les intégrales K et L les formules suivantes:

$$h\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^{h-1}dx}{(x^2-q^2)^k} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(x^2-q^2)^k}\,d\,.\,x^h = \left.\frac{e^{-px}x^h}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty x^h\left\{\frac{-pe^{-px}}{(x^2-q^2)^k} + e^{-px}\frac{-k\,.\,2x}{(x^2-q^2)^{k+1}}\right\}dx,$$

$$-p\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^h dx}{(x^2-q^2)^k} = \int_0^\infty \frac{x^h}{(x^2-q^2)^k}\,d\,.\,e^{-px} = \left.\frac{e^{-px}x^h}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty e^{-px}\left\{\frac{hx^{h-1}}{(x^2-q^2)^k} + x^h\frac{-k\,.\,2x}{(x^2-q^2)^{k+1}}\right\}dx,$$

$$-2k\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^h dx}{(x^2-q^2)^{k+1}} = \int_0^\infty e^{-px}x^h d.\frac{1}{(x^2-q^2)^k} = \left.\frac{e^{-px}x^h}{(x^2-q^2)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{(x^2-q^2)^k}\left\{hx^{h-1}e^{-px} - pe^{-px}x^h\right\}dx.$$

Le terme intégré étant zéro, comme on a vu au numéro précédent, ces trois équations se réduisent à une seule. Mais en vertu de ce que l'on a observé plus haut, il faut distinguer entre le cas où h est pair et est impair. Si l'on met $2h$ et $2h+1$ successivement au lieu de h, on a respectivement:

$$0 = 2hL_{h-1,k} + 2kL_{h,k+1} + pK_{h,k} \quad \text{et} \quad 0 = (2h+1)K_{h,k} + 2kK_{h+1,k+1} + pL_{h,k} \quad . \; . \; (i')$$

On peut se servir de ces deux équations pour éliminer réciproquement les L ou les K: de cette manière on obtient:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= p^2K_{h,k} + (4h^2-4hk-2h-k)\,2q^2K_{h,k+2} - (2h-1)2hq^4K_{h-1,k+2} - 2(k-h)(2k-2h+1)K_{h+1,k+2} \\ 0 &= p^2L_{h,k} + (4h^2-4hk+2h-3k)2q^2L_{h,k+2} - (2h+1)2hq^4L_{h-1,k+2} - 2(k-h)(2k-2h-1)L_{h+1,k+2} \end{aligned}\right\} . (i$$

Afin de pouvoir en faire usage, il sera plus commode de les ramener au même index partiel. En premier lieu, par exemple, au même k: alors il faut substituer les équations identiques

$$K_{h,k} = K_{h+2,k+2} - 2q^2K_{h+1,k+2} + q^4K_{h,k+2},$$
$$L_{h,k} = L_{h+2,k+2} - 2q^2L_{h+1,k+2} + q^4L_{h,k+2};$$

et l'on obtient, en diminuant k de deux unités après la réduction:

$$\left.\begin{aligned} 0 = p^2K_{h+1,k} &- \{p^2q^2 + (k-h-1)(2k-2h-1)\}2K_{h,k} + \{p^2q^2 + 2(4h^2-4hk-2h+3k)\}q^2K_{h-1,k} \\ &- (h-1)(2h-3)2q^4K_{h-2,k} \\ 0 = p^2L_{h+1,k} &- \{p^2q^2 + (k-h-1)(2k-2h-3)\}2L_{h,k} + \{p^2q^2 + 2(4h^2-4hk+2h-k)\}q^2L_{h-1,k} \\ &- (h-1)(2h-1)2q^4L_{h-2,k} \end{aligned}\right\} . (k$$

Pour $k=1$, on a $K_{h,1} = G_{2h}$, $L_{h,1} = G_{2h+1}$; on a dans ce cas pour ces formules:

$$0 = p^2 G_{2h+2} - \{p^2q^2 + h(2h-1)\} 2\,G_{2h} + \{p^2q^2 + 2(4h^2-6h+3)\} q^2 G_{2h-2} - (h-1)(2h-3)\,2q^4\,G_{2h-4},$$

$$0 = p^2 G_{2h+3} - \{p^2q^2 + h(2h+1)\} 2G_{2h+1} + \{p^2q^2 + 2(4h^2-2h-1)\} q^2 G_{2h-1} - (h-1)(2h-1)\,2q^4\,G_{2h-3},$$

équations, qui sont identiques par la substitution des formules (f), comme il doit être.

Au contraire, l'on pourrait aussi ramener les formules (i) au même index h: dans ce cas on a les substitutions

$$K_{h,k} = K_{h-1,k-1} + q^2 K_{h-1,k} \qquad , \quad L_{h,k} = L_{h-1,k-1} + q^2 L_{h-1,k},$$

$$K_{h+1,k} = K_{h-1,k-2} + 2q^2 K_{h-1,k-1} + q^4 K_{h-1,k}, \quad L_{h+1,k} = L_{h-1,k-2} + 2q^2 L_{h-1,k-1} + q^4 L_{h-1,k}.$$

A l'aide de ces formules, en diminuant k d'une unité, et en augmentant h d'une unité, après les substitutions diverses, on a enfin:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\,k(k-1)\,4q^4\,K_{h,k+1} + (4h-4k+5)(k-1)\,2q^2\,K_{h,k} \\ &\quad + \{p^2q^2 - 2(k-h-2)(2k-2h-3)\}\,K_{h,k-1} + p^2\,K_{h,k-2}, \\ 0 &= -\,k(k-1)\,4q^4\,L_{h,k+1} + (4h-4k+7)(k-1)\,2q^2\,L_{h,k} \\ &\quad + \{p^2q^2 - 2(k-h-2)(2k-2h-5)\}\,L_{h,k-1} + p^2\,L_{h,k-2}. \end{aligned}\right\}\ldots(l)$$

Pour $h=0$, on a $K_{0,k} = H_k$, $L_{0,k} = I_k$: donc ces formules donnent:

$$0 = -k(k-1)4q^4 H_{k+1} - (4k-5)(k-1)2q^2 H_k + \{p^2q^2 - 2(k-2)(2k-3)\} H_{k-1} + p^2 H_{k-2},$$

$$0 = -k(k-1)4q^4 I_{k+1} - (4k-7)(k-1)2q^2 I_k + \{p^2q^2 - 2(k-2)(2k-5)\} I_{k-1} + p^2 I_{k-2}.$$

Ces derniers résultats doivent être identiques avec les formules (g) et (h); en effet la substitution de ces dernières en demontre la vérité.

Si les formules (g) et (h) étaient déjà trop compliquées pour se traduire en expression générale, simple, à plus forte raison ces formules (i), (h) ou (l) ne permettent pas de chercher un tel résultat. Néanmoins elles sont propres à déduire dans chaque cas spécial, pour des valeurs données de h et k, une intégrale $K_{h,k}$ ou $L_{h,k}$, soit par les formules (g) et (h), soit par les équations (9) et (10) en faisant usage respectivement des équations (k) ou (l): la dernière voie sera bien la plus aisée à suivre.

9. Quant aux intégrales au dénominateur $(x^2 + q^2)^k$, leurs valeurs et les formules de réduction respectives se déduisent de la même manière, que pour les précédentes, dont on s'est occupé dans les trois derniers numéros. Pour celles-ci, si l'on met:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} x^{2h}\, dx}{x^2 + q^2} = M_{2h}\ , \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}\, dx}{(x^2+q^2)^k} = N_k\,, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px} x^{2h}\, dx}{(x^2+q^2)^k} = P_{h,k}\ ,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} x^{2h+1} dx}{x^2 + q^2} = M_{2h+1}\,, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px} x\, dx}{(x^2+q^2)^k} = O_k\,, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px} x^{2h+1}\, dx}{(x^2+q^2)^k} = Q_{h,k}\ ,$$

on trouve, en ayant égard aux formules (III) et (IV), savoir $M_0 = \frac{1}{q} c$ et $M_1 = d$, au lieu des formules (9) et (10) les suivantes:

$$\left.\begin{aligned} M_{2h} &= (-1)^h c\, q^{2h-1} + \frac{1}{p^{2h-1}} \sum_1^h 1^{2h-2n|1} (-p^2q^2)^{n-1}, \\ M_{2h+1} &= (-1)^h d\, q^{2h} + \frac{1}{p^{2h}} \sum_1^h 1^{2h-2n+1|1} (-p^2q^2)^{n-1}. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (11)$$

De la même manière les formules (g) et (h) deviennent ici:

$$\left.\begin{aligned} 4q^2.k(k-1)N_{k+1} &= \frac{p}{q^{2k-2}} + 2(k-1)(2k-1)N_k - p^2 N_{k-1}, \\ 4q^2.k(k-1)\,O_{k+1} &= \frac{1}{q^{2k-1}} + 2(k-1)(2k-3)\,O_k - p^2 O_{k-1}. \end{aligned}\right\} \quad \dots (m)$$

avec les cas spéciaux:

$N_0 = \frac{1}{p}$ . . . . . . Voir (V), $\qquad O_0 = \frac{1}{p^2}$ . . . . . . Voir (VI),

$N_1 = \frac{1}{p} c$ . . . . . . Voir (III), $\qquad O_1 = d$ . . . . . . Voir (IV),

$N_2 = \frac{1}{2q^2}(1N_1 - pO_1) = \frac{1}{2q^2}\left(\frac{1}{q} c - pd\right)$, $\qquad O_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{q^2} + pN_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} - \frac{p}{q} c\right)$,

etc. $\qquad$ etc.

tandis qu' au lieu des équations de réduction (i), (k) et (l), il faut mettre respectivement les suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= p^2\,\mathrm{P}_{h,k} - (4h^2 - 4hk - 2h - k)\,2q^2\,\mathrm{P}_{h,k+2} - (2h-1)\,2hq^4\,\mathrm{P}_{h-1,k+2} \\
&\qquad - 2(k-h)(2k-2h+1)\,\mathrm{P}_{h+1,k+2}, \\
0 &= p^2\,\mathrm{Q}_{h,k} - (4h^2 - 4hk + 2h - 3k)\,2q^2\,\mathrm{Q}_{h,k+2} - (2h+1)\,2hq^4\,\mathrm{Q}_{h-1,k+2} \\
&\qquad - 2(k-h)(2k-2h-1)\,\mathrm{Q}_{h+1,k+2},
\end{aligned}\right\}.(n)$$

$$\left.\begin{aligned}
0 &= p^2\,\mathrm{P}_{h+1,k} + \left\{p^2q^2 - (k-h-1)(2k-2h-1)\right\} 2\,\mathrm{P}_{h,k} \\
&\quad + \left\{p^2q^2 - 2(4h^2 - 4hk - 2h - 3k)\right\} q^2\,\mathrm{P}_{h-1,k} - (h-1)(2h-3)\,2q^4\,\mathrm{P}_{h-2,k}, \\
0 &= p^2\,\mathrm{Q}_{h+1,k} + \left\{p^2q^2 - (k-h-1)(2k-2h-3)\right\} 2\,\mathrm{Q}_{h,k} \\
&\quad + \left\{p^2q^2 - 2(4h^2 - 4hk + 2h - k)\right\} q^2\,\mathrm{Q}_{h-1,k} - (h-1)(2h-1)\,2q^4\,\mathrm{Q}_{h-2,k},
\end{aligned}\right\}.(o)$$

$$\left.\begin{aligned}
0 &= k.(k-1)\,4q^4\,\mathrm{P}_{h,k+1} + (4h-4k+5)(h-1)\,2q^2\,\mathrm{P}_{h,k} \\
&\quad + \left\{p^2q^2 + 2(k-h-2)(2k-2h-3)\right\} \mathrm{P}_{h,k-1} - p^2\,\mathrm{P}_{h,k-2}, \\
0 &= k(k-1)\,4q^4\,\mathrm{Q}_{h,k+1} + (4h-4k+7)(h-1)\,2q^2\,\mathrm{Q}_{h,k} \\
&\quad + \left\{p^2q^2 + 2(k-h-2)(2k-2h-5)\right\} \mathrm{Q}_{h,k-1} - p^2\,\mathrm{Q}_{h,k-2}.
\end{aligned}\right\}.(p)$$

L'emploi de ces formules est restreint tout comme celui des formules analogues (i), (k) et (l): c'est-à-dire, qu'elles peuvent fournir aisément des résultats pour chaque cas spécial, sans toutefois être susceptibles de pouvoir donner une valeur simple pour les intégrales générales N_k, O_k, $\mathrm{P}_{h,k}$, $\mathrm{Q}_{h,k}$.

10. Puisque nous connaissons à présent les intégrales à dénominateur $(x^2-q^2)^k$ et $(x^2+q^2)^k$, dont on a traité respectivement dans les N°. 6 à 8 et 9, nous pourrions en déduire les intégrales de même forme, mais à dénominateur $(x^4-q^4)^k$. L'équation de réduction

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^{h-4}dx}{(x^4-q^4)^k} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}x^h\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}} - q^4\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^{h-4}\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}}$$

nous montre d'abord, que nous avons à distinguer ici entre quatre classes d'intégrales, où les valeurs de h sont respectivement de la forme

$$4h,\qquad 4h+1,\qquad 4h+2,\qquad 4h+3.$$

En effet, si l'on nomme l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^h\,dx}{x^4-q^4} = \mathrm{R}_h,$$

l'équation précédente mène aisément par le chemin du Numéro 2 aux formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
R_{4h} &= \frac{1^{4h-4/1}}{p^{4h-3}} + q^4 R_{4h-4} = q^{4h} R_0 + \frac{1}{p^{4h-3}} \sum_1^h 1^{4h-4n/1} (p^4 q^4)^{n-1}, \\
R_{4h+1} &= \frac{1^{4h-3/1}}{p^{4h-2}} + q^4 R_{4h-3} = q^{4h} R_1 + \frac{1}{p^{4h-2}} \sum_1^h 1^{4h-4n+1/1} (p^4 q^4)^{n-1}, \\
R_{4h+2} &= \frac{1^{4h-2/1}}{p^{4h-1}} + q^4 R_{4h-2} = q^{4h} R_2 + \frac{1}{p^{4h-1}} \sum_1^h 1^{4h-4n+2/1} (p^4 q^4)^{n-1}, \\
R_{4h+3} &= \frac{1^{4h-1/1}}{p^{4h}} + q^4 R_{4h-1} = q^{4h} R_3 + \frac{1}{p^{4h}} \sum_1^h 1^{4h-4n+3/1} (p^4 q^4)^{n-1}.
\end{aligned}\right\} \quad . . (q)$$

Ces formules font voir qu'il y a vraiment quatre classes distinctes et indépendantes, et que pour la connaissance de ces intégrales générales il nous faut auparavant la valeur des intégrales spéciales R_0, R_1, R_2, R_3. On peut observer ici, que ces mêmes formules résulteraient soit de l'addition, soit de la soustraction des équations (9), (10) et (11): remarque analogue à celle faite à la fin du N°. 6, et qui donnerait des formules de réduction tout-à-fait semblables à celles, que l'on a trouvées là.

Quant aux intégrales nécessaires R_0, R_1, R_2, R_3, la soustraction et l'addition des formules (III) et (VII) nous fournissent:

$$R_0 = \frac{1}{4q^3}(b-a-2c) \quad , \quad R_2 = \frac{1}{4q}(b-a+2c),$$

comme celles des formules (IV) et (VIII) les suivantes:

$$R_1 = \frac{1}{4q^2}(b+a-2d) \quad , \quad R_4 = \frac{1}{4}(b+a+2d). \quad . . (12)$$

On a donc enfin:

$$\left.\begin{aligned}
R_{4h} &= \frac{-a+b-2c}{4} q^{4h-3} + \frac{1}{p^{4h-3}} \sum_1^h 1^{4h-4n/1} (p^4 q^4)^{n-1}, \\
R_{4h+1} &= \frac{a+b-2d}{4} q^{4h-2} + \frac{1}{p^{4h-2}} \sum_1^h 1^{4h-4n+1/1} (p^4 q^4)^{n-1}, \\
R_{4h+2} &= \frac{-a+b+2c}{4} q^{4h-1} + \frac{1}{p^{4h-1}} \sum_1^h 1^{4h-4n+2/1} (p^4 q^4)^{n-1}, \\
R_{4h+3} &= \frac{a+b+2d}{4} q^{4h} + \frac{1}{p^{4h}} \sum_1^h 1^{4h-4n+3/1} (p^4 q^4)^{n-1}.
\end{aligned}\right\} \quad . . (13)$$

Suivent les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,dx}{(x^4-q^4)^k}=\mathrm{S}_k\,,\quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x\,dx}{(x^4-q^4)^k}=\mathrm{T}_k\,,\quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^2\,dx}{(x^4-q^4)^k}=\mathrm{U}_k\,,\quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^3\,dx}{(x^4-q^4)^k}=\mathrm{V}_k,$$

qui sont toutes distinctes par la même cause, qui fournissait les quatre valeurs des R, c'est-à-dire, que les exposants h des quatre formes mentionnées précédemment ne peuvent se réduire l'un à l'autre, mais qu'ils sont tout-à-fait indépendants.

Commençons à y appliquer le Théorème du N°. 3, afin d'obtenir des formules, qui pourront servir à la réduction successive et indépendante de ces quatre séries d'intégrales, et prenons à cette fin pour $f(x)$ successivement x, x^2, x^3, x^4, ou e^{-px}, ou encore $(x^4-q^4)^{-k}$, tout comme nous avons fait auparavant, lorsque nous avions à étudier les intégrales à dénominateur $(x\pm q)^k$ etc.

La première supposition nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,dx}{(x^4-q^4)^k}&=\left.\frac{x\,e^{-px}}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty-\int_0^\infty x\left\{\frac{-p\,e^{-px}}{(x^4-q^4)^k}+e^{-px}\frac{-k\,.\,4\,x^3}{(x^4-q^4)^{k+1}}\right\}dx\\&=\left.\frac{x\,e^{-px}}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty+\int_0^\infty e^{-px}\,dx\left\{\frac{px}{(x^4-q^4)^k}+\frac{4k}{(x^4-q^4)^k}-\frac{4kq^4}{(x^4-q^4)^{k+1}}\right\};\end{aligned}$$

et de même

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x\,dx}{(x^4-q^4)^k}=\left.\frac{x^2\,e^{-px}}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty+\int_0^\infty e^{-px}\,dx\left\{\frac{px^2}{(x^4-q^4)^k}+\frac{4kx}{(x^4-q^4)^k}+\frac{4kq^4\,x}{(x^4-q^4)^{k+1}}\right\},$$

$$3\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^2\,dx}{(x^4-q^4)^k}=\left.\frac{x^3\,e^{-px}}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty+\int_0^\infty e^{-px}\,dx\left\{\frac{px^3}{(x^4-q^4)^k}+\frac{4kx^2}{(x^4-q^4)^k}+\frac{4kq^4\,x^2}{(x^4-q^4)^{k+1}}\right\},$$

$$4\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^3\,dx}{(x^4-q^4)^k}=\left.\frac{x^4\,e^{-px}}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty+\int_0^\infty e^{-px}\,dx\left\{\frac{p}{(x^4-q^4)^{k-1}}+\frac{pq^4}{(x^4-q^4)^k}+\frac{4kx^3}{(x^4-q^4)^k}+\frac{4kq^4\,x^3}{(x^4-q^4)^{k+1}}\right\},$$

ce qui revient à écrire — à cause de la valeur zéro qu'obtient le terme intégré d'après le même raisonnement que dans le N°. 7 —

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{S}_k=p\mathrm{T}_k+4k\mathrm{S}_k+4kq^4\,\mathrm{S}_{k+1} & ,\ \text{ou}\ 0=\mathrm{T}_k+(4k-1)\mathrm{S}_k+4kq^4\,\mathrm{S}_{k+1}\,,\\ 2\mathrm{T}_k=p\mathrm{U}_k+4k\mathrm{T}_k+4kq^4\,\mathrm{T}_{k+1} & ,\ \text{ou}\ 0=\mathrm{U}_k+(4k-2)\mathrm{T}_k+4kq^4\,\mathrm{T}_{k+1}\,,\\ 3\mathrm{U}_k=p\mathrm{V}_k+4k\mathrm{U}_k+4kq^4\,\mathrm{U}_{k+1} & ,\ \text{ou}\ 0=\mathrm{V}_k+(4k-3)\mathrm{U}_k+4kq^4\,\mathrm{V}_{k+1}\,,\\ 4\mathrm{V}_k=p\mathrm{S}_{k-1}+pq^4\mathrm{S}_k+4k\mathrm{V}_k+4kq^4\,\mathrm{V}_{k+1}, & \text{ou}\ 0=p\mathrm{S}_{k-1}+pq^4\mathrm{S}_k+(4k-4)\mathrm{V}_k+4kq^4\,\mathrm{V}_{k+1}.\end{array}\right\}(r')$$

Encore a-t-on par la deuxième supposition pour $f(x)$:

$$-p\int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{(x^4-q^4)^k} = \left.\frac{e^{-px}}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty e^{-px}\frac{-k.4x^3\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}}$$

$$-p\int_0^\infty \frac{e^{-px}x\,dx}{(x^4-q^4)^k} = \left.\frac{e^{-px}x}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty e^{-px}\left\{\frac{1}{(x^4-q^4)^k} + x\frac{-k.4x^3}{(x^4-q^4)^{k+1}}\right\}dx$$

$$= \left.\frac{e^{-px}x}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty + \int_0^\infty e^{-px}dx\left\{\frac{4k-1}{(x^4-q^4)^k} + \frac{4kq^4}{(x^4-q^4)^{k+1}}\right\}.$$

$$-p\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^2dx}{(x^4-q^4)^k} = \left.\frac{e^{-px}x^2}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty e^{-px}\left\{\frac{2x}{(x^4-q^4)^k} + x^2\frac{-k.4x^3}{(x^4-q^4)^{k+1}}\right\}dx$$

$$= \left.\frac{e^{-px}x^2}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty + \int_0^\infty e^{-px}dx\left\{\frac{(4k-2)x}{(x^4-q^4)^k} + \frac{4kq^4x}{(x^4-q^4)^{k+1}}\right\}.$$

$$-p\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^3dx}{(x^4-q^4)^k} = \left.\frac{e^{-px}x^3}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty e^{-px}\left\{\frac{3x^2}{(x^4-q^4)^k} + x^3\frac{-k.4x^3}{(x^4-q^4)^{k+1}}\right\}dx$$

$$= \left.\frac{e^{-px}x^3}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty + \int_0^\infty e^{-px}dx\left\{\frac{(4k-3)x^2}{(x^4-q^4)^k} + \frac{4kq^4x^2}{(x^4-q^4)^{k+1}}\right\}.$$

Or pour la première de ces quatre équations, le terme intégré devient $\frac{1}{(-q^4)^k}$ pour la limite inférieure 0 de x, tandis qu'il devient pour la limite supérieure $x=\infty$, $\frac{1}{\infty.\infty^k}=0$: donc cette équation donne

$$-p\,S_k = -\frac{1}{(-q^4)^k} + 4k\,V_k; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (r'')$$

tandis que les trois équations suivantes sont absolument les mêmes que les trois premières de celles, que l'on a trouvées en premier lieu: et cela parce-que les termes intégrés s'annulent ici par la même raison, qui avait lieu là.

Enfin on obtient par la troisième supposition:

$$-4k\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^3\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}} = \left.\frac{e^{-px}}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{(x^4-q^4)^k}(-pe^{-px}dx);$$

$$-4k\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^4\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}} = \left.\frac{e^{-px}x}{(a^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{(x^4-q^4)^k}\left\{-p\,e^{-px}x + e^{-px}\right\}dx,$$

$$-4k\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^5\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}} = \left.\frac{e^{-px}x^2}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{(x^4-q^4)^k}\left\{-p\,e^{-px}x^2+2x\,e^{-px}\right\}dx,$$

$$-4k\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^6\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}} = \left.\frac{e^{-px}x^3}{(x^4-q^4)^k}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{(x^4-q^4)^k}\left\{-p\,e^{-px}x^3+3x^2e^{-px}\right\}dx.$$

En observant que d'un autre côté, on a identiquement:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^4\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}\,dx}{(x^4-q^4)^k} + q^4\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^5\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}x\,dx}{(x^4-q^4)^k} + q^4\int_0^\infty \frac{e^{-px}x\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^6\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}x^2\,dx}{(x^4-q^4)^k} + q^4\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^2\,dx}{(x^4-q^4)^{k+1}},$$

on voit facilement que ces quatre formules coincident directement avec les quatre équations précédentes: de sorte que nous avons les cinq équations différentes (r') et (r'') pour chercher des équations de réduction entre les intégrales des quatre classes diverses séparément. Dans ce but substituons la valeur de S_k de (r'') dans la première des équations (r'); la résultante exprimera T_k en fonction de divers V: substituons cette valeur dans la deuxième de (r'), et l'intégrale U_k se trouve donnée par divers V: enfin éliminons les U entre cette dernière équation et la troisième des (r'): il en résultera une équation de condition entre les V seulement; et maintenant à l'aide des équations originales, on peut aisément obtenir des formules où l'on ne rencontre que les seules intégrales S, U, ou T. Le résultat sera enfin donné par les formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{6}{(-q^4)^k} - \left\{p^4-(4k-3)(4k-2)(4k-1)4k\right\}V_k + (16k^2+1)k(k+1)48q^4V_{k+1}\\
&\quad + (2k+1)k(k+1)(k+2)384q^8V_{k+2} + k(k+1)(k+2)(k+3).256q^{12}V_{k+3},\\
0 &= \frac{6p}{(-q^4)^k} + \left\{p^4-(4k-3)(4k-2)(4k-1)4k\right\}(4k-3)U_k\\
&\quad + \left\{p^4-(256k^4+144k^3+104k^2+9k+3)4\right\}4kq^4U_{k+1}\\
&\quad - (32k^3+76k^2+67k+21)k(k+1)192q^8U_{k+2}\\
&\quad - (16k^2+51k+39)k(k+1)(k+2).256q^{12}U_{k+3}\\
&\quad - k(k+1)(k+2)(k+3)^2 1024q^{16}U_{k+4},
\end{aligned}\right\}(s)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{3p^2}{(-q^4)^k} - \left\{p^4 - (4k-3)(4k-2)(4k-1)4k\right\}(4k-3)(2k-1)T_k \\
& - \left\{p^4(8k-1) - 640k^5 + 256k^4 + 584k^3 + 64k^2 + 24k + 3)8\right\} 2kq^4 T_{k+1} \\
& - \left\{p^4 - (640k^4 + 1632k^3 + 2276k^2 + 1239k + 39)4\right\} k(k+1)8q^8 T_{k+2} \\
& + (160k^3 + 592k^2 + 723k + 36)k(k+1)(k+2)128q^{12} T_{k+3} \\
& + (20k^2 + 77k + 45)k(k+1)(k+2)(k+3)512q^{16} T_{k+4} \\
& + k(k+1)(k+2)^2(k+3)^2 4096 q^{20} T_{k+5}, \\
0 = {} & \frac{p^3}{(-q^4)^k} - \left\{p^4 - (4k-3)(4k-2)(4k-1)4k\right\} S_k + (16k^2+1)k^2 48q^4 S_{k+1} \\
& + (2k+1)k^2(k+1)384q^8 S_{k+2} + k^2(k+1)(k+2)256q^{12} S_{k+3}.
\end{aligned}
\right\} \cdot (s)
$$

11. On pourrait encore aller plus loin et déterminer généralement les intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} x^h dx}{(x+q)^k (x-q)^l (x^2+q^2)^m},$$

mais outre que les réductions deviennent de plus en plus compliquées, ces intégrales ne sont plus aussi remarquables que les précédentes. Car, en mettant successivement x au lieu de x^2 et de x^4 — ce qui est évidemment permis, puisque entre les mêmes limites ces fonctions de x, savoir x^2 et x^4, restent continues, et n'ont ni un maximum ni un minimum — les limites de la nouvelle variable x restent les mêmes 0 et ∞. Dès-lors les formules trouvées donneront aussi la valeur des intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}} x^h dx}{x-q^2} = 2G_{2h+1}, \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}} x^h dx}{x-q^2}\sqrt{x} = 2G_{2h+2},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}} dx}{(x-q^2)^k} = 2I_k, \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}} dx}{(x-q^2)^k}\sqrt{x} = 2H_{k+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}} x^h dx}{(x-q^2)^k} = 2L_{h,k}, \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}} x^h dx}{(x-q^2)^k}\sqrt{x} = 2K_{h+1,k},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}} x^h dx}{x+q^2} = 2M_{2h+1}, \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}} x^h dx}{x+q^2}\sqrt{x} = 2M_{2h+2},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}} dx}{(x+q^2)^k} = 2O_k, \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}} dx}{(x+q^2)^k}\sqrt{x} = 2N_{k+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}}x^h\,dx}{(x+q^2)^k} = 2\,Q_{h,k} \quad , \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{x}}x^h\,dx}{(x+q^2)^k}\sqrt{x} = 2\,P_{h+1,k} \quad ,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt[4]{x}}x^h\,dx}{x-q^4} = 4\,R_{4h+3} \quad , \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt[4]{x}}x^h\,dx}{x-q^4}\sqrt{x} = 4\,R_{4h+5} \quad ,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt[4]{x}}\,dx}{(x-q^4)^k} = 4\,V_k \quad . \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt[4]{x}}\,dx}{(x-q^4)^k}\sqrt{x} = T_{k+1} \quad .$$

De ces deux séries d'intégrales semblables, la première peut être regardée comme la suite de la série des intégrales (I), (1), (3), (5) et (II) (2), (4), (6) : la différence consiste en ce que l'exponentielle e^{-px} est changée ici en $e^{-p\sqrt{x}}$ et $e^{-p\sqrt[4]{x}}$.

---

12. Passons à un autre genre d'application du Théorème I, démontré dans le N°. 3. Jusqu' ici nous avions pris pour $f(x)$ soit x^h, soit $(x \pm q)^{-k}$, $(x^2 \pm q^2)^{-k}$, soit e^{-px}, et nous avons vu que ces trois suppositions différentes menaient généralement aux mêmes resultats auprès des intégrales étudiées plus haut. Maintenant prenons pour $f(x)$ en premier lieu $\frac{1}{2}\,l.(q \pm x)^2$ ou $\frac{1}{2}\,l.(q^2 \pm x^2)^2$, forme à laquelle se prêtent les intégrales citées ou trouvées: le résultat sera tout autre que celui qu'on vient d'obtenir, puisque, outre les fonctions algébriques et exponentielles, on devra acquérir un logarithme sous le signe d'intégration définie.

Commençons par les intégrales (I), (1), (3), (6) et (II), (2), (4), (8), dont le dénominateur est respectivement $x+q$ et $x-q$, et voyons d'abord, si l'on peut déterminer la valeur du terme intégré entre les deux limites 0 et ∞. L'expression la plus générale de ce terme est évidemment

$$\frac{e^{-px}x^h\,l.(q \pm x)^2}{(x \pm q)^k} \,.$$

Pour la limite $x=o$, le facteur $e^{-px}\;l.(q \pm x)^2.\;(x \pm q)^{-k}$ est égal à $l.q^2 : (\pm q)^k$: il reste alors le facteur x^h, dont la valeur est zéro pour $h > o$: pour $h = o$ au contraire ce facteur n'existe pas; donc pour ces deux cas le terme en question devient pour la limite inférieure

$$o \quad \text{ou} \quad l.q^2 : (\pm q)^k \;,\; \text{selon que } h > \text{ou} = o.$$

Quant à l'autre limite $x = \infty$, il faut agir autrement: là la règle ordinaire pour la détermination de la valeur indéterminée $\frac{e^{-\infty}\infty^h l.\infty}{\infty^k}$ donne pour la valeur du terme:

$$\frac{l.(q \pm x)^2}{e^{p\,x} x^{-h}(x \pm q)^k} = \frac{\pm\, 2 : (q \pm x)}{p\,e^{p\,x} x^{-h}(x \pm q)^k - h\,x^{-h-1} e^{p\,x}(x \pm q)^k + k(x \pm q)^{k-1} e^{p\,x} x^{-h}}$$

$$= \frac{2\,x^{h+1}}{e^{px}\big[(px - h)(x \pm q)^{k+1} + kx(x \pm q)^k\big]}$$

$$= \frac{2\,x^{h+1}}{e^{px}\big[p\,(x \pm q)^{k+2} - (pq + h - k)(x \pm q)^{k+1} \mp kq\,(x \pm q)^k\big]}\,.$$

Si l'on poursuit la différentiation, on verra que le numérateur se réduit enfin à $1^{h+1/1}$, tandis que le dénominateur garde toujours la forme

$$e^{px}\,[\ldots (x \pm q)^{k+2} + \ldots\ldots];$$

donc la fraction est toujours égale à $\frac{1^{h+1/1}}{e^{\infty}.\infty} = 0$, sous la condition de $k > -2$: ce qu'il s'agissait de chercher. On voit donc que le terme, déjà intégré, a une valeur zéro dans les intégrales dérivées des équations (1), (2), (6), (8): tandis que sa valeur pour les intégrales déduites des formules (I), (II), (3) et (4), sera respectivement

$$-\,l.q^2\ ,\quad -\,l.q^2\ ,\quad \frac{-\,l.q^2}{q^k}\ ,\quad \frac{-\,l.q^2}{(-q)^k}\,.$$

13. Après ces observations préliminaires le théorème I du N°. 3 donnera tout de suite par les intégrales (I), (II), (1), (2), (3), (4), (6), (8) respectivement:

$$2\,a = \int_0^\infty e^{-px} d.\,l.(q + x)^2 = -\,l.q^2 - \int_0^\infty l.(q + x)^2\,(-p\,e^{-px}\,dx)\,,$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-px}\,l.(q + x)^2\,dx = \frac{1}{p}\,(2\,a + l.q^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$2\,b = \int_0^\infty e^{-px} d.\,l.(q - x)^2 = -\,l.q^2 - \int_0^\infty l.(q - x)^2\,(-p\,e^{-px}\,dx)\,,$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-px}\,l.(q - x)^2\,dx = \frac{1}{p}\,(2\,b + l.q^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned}2\,A_h &= \int_0^\infty e^{-px}x^h.d.l.(q+x)^2 = \int_0^\infty e^{-px}l.(q+x)^2\left\{p\,x^h - h\,x^{h-1}\right\}dx\\ 2\,B_h &= \int_0^\infty e^{-px}x^h.d.l.(q-x)^2 = -\int_0^\infty e^{-px}l.(q-x)^2\left\{p\,x^h - h\,x^{h-1}\right\}dx\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ (t')$$

$$\left.\begin{aligned}2\,C_k &= \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(x+q)^{k-1}}d.l.(q+x)^2 = -\frac{l.q^2}{q^{k-1}} - \int_0^\infty l.(q+x)^2\left\{\frac{-p\,e^{-px}}{(x+q)^{k-1}} + e^{-px}\frac{-(k-1)}{(x+q)^k}\right\}dx\\ 2\,D_k &= \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(x-q)^{k-1}}d.l.(q+x)^2 = -\frac{l.q^2}{(-q)^{k-1}} - \int_0^\infty l.(q-x)^2\left\{\frac{-p\,e^{-px}}{(x-q)^{k-1}} + e^{-px}\frac{-(k-1)}{(x-q)^k}\right\}dx\end{aligned}\right\}(u')$$

$$\left.\begin{aligned}2E_{h,k} &= \int_0^\infty \frac{e^{-px}x^h}{(x+q)^{k-1}}d.l.(q+x)^2 = -\int_0^\infty l.(q+x)^2\left\{\frac{-pe^{-px}x^h + hx^{h-1}e^{-px}}{(x-q)^{k-1}} + e^{-px}x^h\frac{-(k-1)}{(x-q)^k}\right\}\\ 2F_{h,k} &= \int_0^\infty \frac{e^{-px}x^h}{(x-q)^{k-1}}d.l.(q-x)^2 = -\int_0^\infty l.(q-x)^2\left\{\frac{-pe^{-px}x^h + hx^{h-1}e^{-px}}{(x-q)^{k-1}} + e^{-px}x^h\frac{-(k-1)}{(x-q)^k}\right\}\end{aligned}\right\}(v')$$

Les intégrales (t'), (u'), (v') se présentent sous la forme d'une équation de réduction. Tâchons de les ramener à une forme, où la valeur des intégrales soit exprimée généralement. Si nous nommons:

$$\int_0^\infty e^{-px}x^h dx\,.\,l.(q+x)^2 = A'_h\,,\quad \int_0^\infty e^{-px}x^h dx\,.\,l.(q-x)^2 = B'_h,$$

la première des équations (t') donne:

$$p\,A'_h - h\,A'_{h-1} = 2\,A_h \qquad \text{ou} \qquad p^h\,A'_h = 2\,p^{h-1}A_h + h\,p^{h-1}A'_{h-1}\quad .\ .\ .\ (t_i)$$

Parceque A^1_0 n'est autre chose que l'intégrale (14) et qu'elle est connue par conséquent, on trouve:

$$p\,A'_1 = 2\,A_1 + 1\,A'_0\,,$$
$$p^2A'_2 = p\,.\,2\,A_2 + 2\,.\,2\,A_1 + 1\,.\,2\,.\,A'_0\,,$$
$$p^3A'_3 = p^2.3\,A_3 + 3p.2\,A_2 + 2\,.\,3\,.\,2\,A_1 + 1\,.\,2\,.\,3\,.\,A'_0\,,$$

donc en général

$$p^hA'_h = 1^{h/1}A'_0 + 1^{h/1}\sum_1^h \frac{p^{m-1}}{1^{m/1}}2\,A_m,$$

ou par la substitution de la valeur de A'_0, tirée de l'équation (14),

$$p^{h+1}A'_h = 1^{h/1}(2\,a + l\,.\,q^2) + 2\,.\,1^{h/1}\sum_1^h \frac{p^m}{1^{m/1}}A_m\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (16)$$

Mais si l'on veut éviter la sommation toujours difficile des diverses intégrales A_h, on peut substituer successivement dans chaque résultat précédent les valeurs de A'_{h-1} trouvées par (t_1) et celles de A_h suivant la formule (1); où l'on peut toujours prendre les intégrales A'_0 et A_1 pour données. Alors on trouvera l'équation:

$$p^h A'_h = 1^{h/1} A'_0 + 2^{h-1/1} 2 A_1 \sum_0^{h-1} 2^{n/1} (-pq)^n + \frac{2}{p} 3^{h-2/1} \sum_0^{h-2} \left\{ \frac{(pq)^n}{3^{n/1}} \sum_0^n \frac{1^{m+1/1}}{(-pq)^m} \right\},$$

donc par la substitution des valeurs connues de A'_0 et de A_1 on obtient enfin:

$$p^{h+1} A'_h = 1^{h/1}(2a + l.q^2) - 2(apq-1) 2^{h-1/1} \sum_0^{h-1} 2^{n/1}(-pq)^n + 2.3^{h-2/1} \sum_0^{h-2} \left\{ \frac{(pq)^n}{3^{n/1}} \sum_0^n \frac{1^{m+1/1}}{(-pq)^m} \right\}. \quad (17)$$

De même manière la seconde des équations (t') donnera respectivement, en remarquant qu'ici B'_0 est donnée par l'équation (15):

$$p B'_h - h B'_{h-1} = 2 B_h \,, \quad (t_2)$$

$$p^{h+1} B'_h = 1^{h/1} (2b + l.q^2) + 2.1^{h/1} \sum_1^h \frac{p^m}{1^{m/1}} B_m \,; \quad (18)$$

d'où par la même méthode que ci-dessus, on trouve:

$$p^{h+1} B'_h = 1^{h/2}(2b + l.q^2) + 2(bpq+1) 2^{h-1/1} \sum_0^{h-1} 2^{n/1}(pq)^n + 2.3^{h-2/1} \sum_0^{h-2} \left\{ \frac{(-pq)^n}{3^{n/1}} \sum_0^n \frac{1^{m+1/1}}{(pq)^m} \right\}. \quad (19)$$

14. Pour les intégrales qui suivent à présent, sav.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} l.(q+x)^2}{(x+q)^k} dx = C'_k \quad , \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px} l\,(q-x)^2}{(x-q)^k} dx = D'_k \,,$$

la première des équations (u') nous fournit d'abord:

$$(k-1)\, C'_k = \frac{l.q^2}{q^{k-1}} + 2\, C_k - p\, C'_{k-1} \quad (u_1)$$

formule, qui ne vaut que pour $k > 1$, comme l'on a remarqué au N°. 12. Or on a par l'équation (14) $\quad C'_0 = \frac{2a + l.q^2}{p}$;

donc cette formule (u_1) donne dans le cas de $k = 1$:

$$0.C'_1 = \frac{l.q^2}{q^0} + 2\, C_1 - p\, C'_0 = l.q^2 + 2a - p\, \frac{2a + l.q^2}{p} = 0$$

donc la valeur de C'_1 est indéterminée ici, comme l'on pouvait s'y attendre

d'avance, parceque la formule ne vaut plus pour ce cas; j'ai tâché en vain de déterminer l'intégrale C'_1 de quelque autre manière. Par suite de l'équation (u_1) toutes les intégrales C'_k restent indéterminées.

Tout de même nous aurons par la seconde des équations (u'):

$$(k-1)\, D'_k = \frac{l.q^2}{(-q)^{k-1}} + 2\, D_k - p D'_{k-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (u_2)$$

formule, qui, d'après la valeur de D'_0 connue par l'intégrale (15), ne donne dans la supposition de $h=1$, pour D^0_1 que $0:0$, c'est-à-dire une valeur indéterminée; donc on ne pourra déterminer ici aucune des intégrales D'_k, comme nous l'apprend l'équation (u_2).

Il est clair que les mêmes observations valent des intégrales contenues dans les équations (v') où se trouve la même cause d'indétermination, savoir le facteur $k-1$.

15. Vient le tour des intégrales à dénominateur $q^2 - x^2$, que l'on pourra transformer par le Théorème I du N°. 3, à l'aide de la supposition $f(x) = \frac{1}{2}\, l.(q^2-x^2)^2$. Ce sont les équations (VII), (VIII), (9), (10), (g), (h), (l). D'abord il faut chercher la valeur du terme déjà intégré, dont la forme la plus générale sera:

$$\frac{e^{-px}\, x^h\, l.(q^2-x^2)^2}{(x^2-q^2)^k}.$$

Le facteur $e^{-px}\, l.(q^2-x^2)^2 \,.\, (x^2-q^2)^{-k}$ devient $\dfrac{2\, l.q^2}{(-q^2)^k}$ pour la limite inférieure 0 de x: l'autre facteur x^h est zéro pour h plus grand que zéro: dans ce cas le terme sera nul; mais lorsqu'il n'y a pas de facteur x^h, sa valeur reste $2\, l.q^2 \,.\, (-q^2)^{-k}$. Pour la limite supérieure ∞ de x, le terme se présente sous la forme $\dfrac{\infty\,.\,0\,.\,\infty}{\infty^k}$: donc il faut ici appliquer les règles usuelles, comme suit:

$$\frac{l\,(q^2-x^2)^2}{e^{-px}x^{-h}(x^2-q^2)^k} = \frac{2\,.(-2x):(q^2-x^2)}{pe^{px}x^{-h}(x^2-q^2)^k - hx^{-h-1}e^{px}(x^2-q^2)^k + k.2x(x^2-q^2)^{k-1}e^{px}x^{-h}}$$

$$= \frac{4\, x^{h+1}}{e^{px}\left[(p-hx)(x^2-q^2)^{k+1} + 2\,kx\,(x^2-q^2)^k\right]}.$$

Tout comme au N°. 12, la valeur sera nulle, sous la condition de $k \geqq 0$.

Le terme intégré devient donc pour la suite des intégrales, suivant que dans la numérateur de la fraction il y a le facteur x^h ou non:

$$0 \quad \text{et} \quad -\frac{2\,l.q^2}{(-q^2)^k}\,.$$

Les intégrales VII et VIII donnent à présent par le Théorème I du N°. 5:

$$4\int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{x^2-q^2}=\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{x}d.l.(q^2-x^2)^2=\frac{e^{-px}l.(q^2-x^2)^2}{x}\Big\}_0^\infty-\int_0^\infty l.(q^2-x^2)^2\left\{\frac{-pe^{-px}}{x}+e^{-px}\frac{-1}{x^2}\right\}dx,$$

$$4\int_0^\infty \frac{e^{-px}xdx}{x^2-q^2}=e^{-px}d.l.(q^2-x^2)^2=e^{-px}l.(q^2-x^2)^2\Big\}_0^\infty-\int_0^\infty l.(q^2-x^2)^2\,(-p\,e^{-px})\,dx\,.$$

Pour la première intégrale obtenue ici, le terme intégré ne tombe pas sous la forme étudiée ci-dessus: pour $x=0$, il sera $\frac{e^0\,l.q^4}{0}=\infty$; donc ce terme étant infini, cette équation ne peut rien nous apprendre. Pour la seconde, au contraire, le terme déjà intégré est $-2\,l.q^2$, ce qui donne.

$$2\,(a+b)=-2\,lq^2+p\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q^2-x^2)^2\,dx,$$

ou bien

$$\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q^2-x^2)^2\,dx=\frac{2}{p}\,(a+b+l.q^2)\,; \quad \dots\dots\dots \quad (20)$$

résultat, qui est une suite nécessaire des équations (14) et (15).

Pour l'application aux formules (9) et (10), nommons l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-px}x^h\,l.(q^2-x^2)^2\,dx=G'_k\,;$$

elles nous donnent les équations suivantes:

$$4\,G_{2h}=\int_0^\infty e^{-px}x^{2h-1}d.l.(q^2-x^2)^2=e^{-px}x^{2h-1}\,(l.q^2-x^2)^2\Big\}_0^\infty$$

$$-\int_0^\infty l.(q^2-x^2)^2\left\{-pe^{-px}x^{2h-1}+(2h-1)x^{2h-2}e^{-px}\right\}$$

$$=\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q^2-x^2)^2\left\{p\,x^{2h-1}-(2h-1)\,x^{2h-2}\right\},$$

$$4G_{2h+1}=\int_0^\infty e^{-px}x^{2h}\,d.l.(q^2-x^2)^2=e^{-px}x^{2h}\,l.(q^2-x^2)^2\Big\}_0^\infty$$
$$-\int_0^\infty l.(q^2-x^2)^2\left\{-pe^{-px}x^{2h}+2hx^{2h-1}e^{-px}\right\}$$
$$=\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q^2-x^2)^2\left\{px^{2h}-2hx^{2h-1}\right\},$$

parceque les termes déjà intégrés ont une valeur nulle, d'après le raisonnement précédent. On s'assure aisément, qu'ici il n'y a pas occasion de distinguer entre les deux cas de h pair et impair, puisque dans la même formule on rencontre une G' à h pair et une à h impair. De plus, on peut mettre ces équations sous la forme:

$$4G_{2h}=p\,G'_{2h-1}-(2k-1)\,G'_{2h-2}\quad,\qquad 4G_{2h+1}=p\,G'_{2h}-2hG'_{2h-1}\ ,$$

d'où il suit que les deux équations sont identiques et qu'elles peuvent être remplacées par la seule

$$p\,G'_h=h\,G'_{h-1}+4G_{h+1}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(w')$$

Puisque la valeur de G'_0 revient à celle de l'intégrale (20), on a successivement:

$$p\,G'_1=1.G'_0\quad+4G_2,$$
$$p^2G'_2=1.2.G'_0\quad+2.4G_2+4pG_3,$$
$$p^3G'_3=1.2.3.G'_0+2.3.4.G_2+3.4.pG_3+4p^2G_4,$$

donc en général

$$p^hG'_h=1^{h/1}G'_0+4.1^{h/1}\sum_1^h\frac{p^{m-1}}{1^{m/1}}G_{m+1},$$

ou bien, par la substitution de la valeur (20) au lieu de G'_0,

$$G'_h=\frac{2}{p^{h+1}}1^{h/1}\left\{a+b+l.q^2+2\sum_1^h\frac{p^m}{1^{m/1}}G_{m+1}\right.\quad\ldots\ldots\ldots\quad(21)$$

Dans ce cas-ci, on peut trouver pour les G'_h une autre valeur indépendante, assez simple, sans avoir besoin pour cela de recourir aux intégrales G_h. Lorsqu'on substitue pour G'_1, G'_2 etc. leurs valeurs successivement calculées, pour G'_0 la valeur de (20) et pour G_1, G_2 etc., leurs valeurs tirées des formules (9) et (10), on obtient successivement:

$$\tfrac{1}{2}p\,G'_1 = \frac{1}{p}l.q^2 + \frac{1}{p}(a+b) + q(b-a) + 2\frac{1}{p},$$

$$\tfrac{1}{2}p^2G'_2 = \frac{1.2}{p}l.q^2 + \frac{2+p^2q^2}{p}(a+b) + 2q(b-a) + 2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\right),$$

$$\tfrac{1}{2}p^3G'_3 = \frac{1.2.3}{p}l.q^2 + \frac{2.3+3p^2q^2}{p}(a+b) + (2.3.+p^2q^2)q(b-a) + 2\left\{2.3\frac{1}{p} + \frac{1.2+p^2q^2}{p} + 3.\frac{1}{p}\right\},$$

$$\tfrac{1}{2}p^4G'_4 = \frac{1.2.3.4}{p}l.q^2 + \frac{2.3.4+3.4p^2q^2+p^4q^4}{p}(a+b) + (2.3.4+4.p^2q^2)q(b-a) +$$
$$+ 2\left\{2.3.4\frac{1}{p} + 4\frac{1.2+p^2q^2}{p} + 3.4\frac{1}{p} + \frac{1.2.3+p^2q^2}{p}\right\}.$$

L'inspection de la formation des termes fait voir assez aisément — surtout si l'on continue le calcul des G' suivantes, et si l'on fait attention à l'ordre gardé dans le dernier terme, dont 2 est le coefficient, — qu'ici il y a de nouveau différence entre les expressions de G'_h pour h pair et impair: cette différence a sa source dans celle entre les expressions de G_{2h} et G_{2h+1}. On trouvera enfin les valeurs générales:

$$\tfrac{1}{2}\,p^{2h+1}G'_{2h} = 1^{2h/1}\;l.q^2 + 1^{2h/1}\;a\sum_0^{2h-1}\frac{(-pq)^n}{1^{n/1}} + 1^{2h/1}\;b\sum_0^{2h-1}\frac{(pq)^n}{1^{n/1}}$$
$$+ 2^{2h-1/1}\sum_1^{h}\left\{\frac{1}{1^{2n/1}}\sum_0^{n-1}1^{2n-2m/1}\,(p^2q^2)^m\right\}$$
$$+ 3^{2h-2/1}\sum_1^{h}\left\{\frac{1}{1^{2n-1/1}}\sum_0^{n-1}2^{2n-2m-1/1}\,(p^2q^2)^m\right\}, \quad . \quad . \quad (22)$$

$$\tfrac{1}{2}\,p^{2h+2}G'_{2h+1} = 1^{2h+1/1}\,l.q^2 + 1^{2h+1/1}\,a\sum_0^{2h}\frac{(-pq)^n}{1^{n/1}} + 1^{2h+1/1}\;b\sum_0^{2h}\frac{(pq)^n}{1^{n/1}}$$
$$+ 2^{2h/1}\sum_1^{h+1}\left\{\frac{1}{1^{2n+1/1}}\sum_0^{n-1}1^{2n-2m+1/1}\,(p^2q^2)^m\right\}$$
$$+ 3^{2h-1/1}\sum_1^{h}\left\{\frac{1}{1^{2n/1}}\sum_0^{n-1}1^{2n-2m/1}\,(p^2q^2)^m\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

L'on voit que la différence entre ces deux expressions se trouve principalement dans les deux dernières sommations, les trois autres termes ne changeant pas de nature.

Quant à la formule (g), elle est dans le même cas que (VII) et par la

même raison ne donnerait rien: mais on peut pourtant l'employer à l'aide de l'équation (h), si l'on fait attention à la rélation identique

$$H_{k-1} + q^2 H_k = \int_0^\infty \frac{e^{-px} x^2 \, dx}{(x^2-q^2)^k};$$

alors celle-ci, et l'équation (h) nous fourniront pour les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px} l.(q^2-x^2)^2 \, dx}{(x^2-q^2)^k} = H'_k \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px} l.(q^2-x^2)^2 \, x dx}{(x^2-q^2)^k} = I'_k$$

les formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned} 4 I_k &= \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(x^2-q^2)^{k-1}} d.l.(q^2-x^2)^2 = \left.\frac{e^{-px} l.(q^2-x^2)^2}{(x^2-q^2)^{k-1}}\right\}_0^\infty \\ &\quad -\int_0^\infty l.(q^2-x^2)^2 \left\{\frac{-p e^{-px}}{(x^2-q^2)^{k-1}} + e^{-px}\frac{-(k-1)2x}{(x^2-q^2)^k}\right\} dx, \\ 4\left\{H_{k-1}+q^2 H_k\right\} &= \int_0^\infty \frac{x e^{-px}}{(x^2-q^2)^{k-1}} d.l.(q^2-x^2) = \left.\frac{x e^{-px} l.(q^2-x^2)^2}{(x^2-q^2)^{k-1}}\right\}_0^\infty \\ &\quad -\int_0^\infty l.(q^2-x^2)^2 \left\{\frac{e^{-px} - p e^{-px} x}{(x^2-q^2)^{k-1}} + x e^{-px}\frac{-(k-1)2x}{(x^2-q^2)^k}\right\} dx. \end{aligned}\right\} (x')$$

La valeur des termes intégrés est ici, d'après ce que l'on a dit à ce sujet, $-\dfrac{2 l q^2}{(-q^2)^k}$ et 0 respectivement. On a donc les équations:

$$\left.\begin{aligned} 4 I_k &= \frac{2.l q^2}{(-q^2)^{k-1}} + p H'_{k-1} + 2(k-1) I'_k, \\ 4(H_{k-1} + q^2 H_k) &= - H'_{k-1} + p I'_{k-1} + 2(k-1)\left\{H'_{k-1} + q^2 H'_k\right\} \\ &= (2k-3) H'_{k-1} + 2(k-1) q^2 H'_k + p I'_{k-1}. \end{aligned}\right\} \ldots (x'')$$

Mais si l'on élimine par la première de ces formules soit les I', soit les H' de la seconde, et que l'on augmente k d'une unité dans le premier résultat, on obtient à l'aide des équations (g') et (h'):

$$4k(k-1)q^2 H'_{k+1} + 2(k-1)(2k-1)H'_k - p^2 H'_{k-1} = 4(4k-3)H_k + 8(2k-1)q^2 H_{k+1} - \frac{2pl.q^2}{(-q^2)^{k-1}} . (x_1)$$

$$4k(k-1)q^2 I'_{k+1} + 2(k-1)(2k-3) I'_k - p^2 I'_{k-1} = 4(4k-5) I_k + 8(2k-1)q^2 I_{k+1} - \frac{2l.q^2}{(-q^2)^{k-1}} . (x_2)$$

Dans le cas de $k = 1$, elles donnent bien, comme il doit être:

$$H'_0 = \frac{2}{p}(a + b + l.q^2) \quad , \quad \text{Voyez (20)}$$

$$I'_0 = G'_1 = \frac{2}{p}\left\{2 + a + b + (b-a)pq + l.q^2\right\} ;$$

mais le coefficient de H'_k et de I'_k devient zéro: de même, pour $k = 0$, les coefficients de H'_{k+2} et I'_{k+2} s'annulent aussi: donc la valeur des intégrales H'_1 et I'_1 ne saurait être tirée des équations (x_1) et (x_2), qui la laissent indéterminée. Donc les H'_k et les I'_k restent indéterminées de même. On aurait pu s'attendre à ce résultat en vertu de ce que l'on a observé à l'égard des équations (u_1) et (u_2).

16. Passons à la transformation d'intégrales à dénominateur $x^2 + q^2$, savoir (III), (IV), (11), (m) et (p). De premier abord nous pouvons exclure les quatre intégrales (m) et (p) de nos recherches, parce qu'elles ne donneraient qu'un résultat indéterminé, d'après ce qu'on a observé au sujet des intégrales précédentes. Encore l'équation (III) est dans le cas de (VII), et ne pourrait offrir qu'une formule indéterminée, où l'un des termes a une valeur infinie. Restent donc les intégrales (IV) et (11).

L'application du Théorème I de N°. 3 donnera ici pour le terme déjà intégré soit $e^{-px}\,l.(x^2 + q^2)^2$, soit $e^{-px}\,x^h\,l.(x^2 + q^2)^2$

Un raisonnement, tout-à-fait analogue à celui du N°. 15, fera voir que, entre les limites 0 et ∞ de x, la valeur de ces termes est respectivement $-2\,l.q^2$ et 0. Donc le théorème cité donnera ici immédiatement par l'équation (IV):

$$4\int_0^\infty \frac{e^{-px}x\,dx}{x^2+q^2} = \int_0^\infty e^{-px}\,d\,l.(x^2+q^2)^2 = -2\,l.q^2 - \int_0^\infty l.(q^2+x^2)^2\,(-pe^{-px}),$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q^2+x^2)^2\,dx = \frac{2}{p}(l.q^2 + 2\,d) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Les équations (11) donnent de plus pour l'intégrale, que nous nommerons:

$$\int_0^\infty e^{-px}x^h\,l.(q^2+x^2)^2\,dx = M'_h$$

à l'aide toujours du même Théorème et d'après les observations précédentes sur le terme intégré;

$$4M_{2h} = \int_0^\infty e^{-px}x^{2h-1}d.l.(q^2+x^2)^2 = -\int_0^\infty l.(q^2+x^2)^2\left\{-pe^{-px}x^{2h-1}+(2h-1)x^{2h-2}e^{-px}\right\},$$

$$4M_{2h+1} = \int_0^\infty e^{-px}x^{2h}d.l.(q^2+x^2)^2 = -\int_0^\infty l.(q^2+x^2)^2\left\{-pe^{-px}x^{2h} + 2hx^{2h-1}e^{-px}\right\}.$$

La distinction entre le cas de h pair et impair s'évanouit ici, parce que dans la même formule on rencontre une M' à h pair et une à h impair; de plus ces deux équations deviennent alors identiques, et l'on retombe sur la seule:

$$4M_h = pM'_{h-1} - (h-1)M'_{h-2} \quad \text{ou bien} \quad pM'_h = hM'_{h-1} + 4M'_{h+1} \quad \ldots \ldots \quad (y')$$

lorsqu'on augmente le h d'une unité. Puisque M'_0 est donnée par l'équation (24), on trouve par l'application successive de cette formule de réduction (y') enfin l'équation générale

$$p^h M'_h = 1^{h/1}M'_0 + 4.1^{h/1}\sum_1^h \frac{p^{m-1}}{1^{m/1}}M_{m+1},$$

ou bien par substitution de la valeur de M'_0,

$$p^{h+1}M'_h = 2.1^{h/1}\left[l.q^2 + 2d + 2\sum_1^h \frac{p^m}{p^{m/1}}M_{m+1}\right]. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

Mais lorsqu'on ne veut pas dépendre d'une sommation des diverses intégrales M_h, on peut suivre le même chemin, comme pour les formules (22) et (23); on obtiendra alors des formules analogues, où de nouveau l'on doit distinguer entre les cas de h pair et impair:

$$\tfrac{1}{2}p^{2h+1}M'_{2h} = 1^{2h/1}l.q^2 + 1^{2h/1}2d\sum_0^h\frac{(-p^2q^2)^n}{1^{2n/1}} + 1^{2h/1}2c\sum_1^h\frac{(pq)^{2n-1}}{1^{2n-1/1}} +$$
$$+2^{2h-1/1}\sum_1^h\left\{\frac{1}{1^{2n/1}}\sum_0^{n-1}1^{2n-2m/1}(-p^2q^2)^m\right\} +$$
$$+3^{2h-2/1}\sum_1^h\left\{\frac{1}{1^{2n-1/1}}\sum_0^{n-1}1^{2n-2m/1}(-p^2q^2)^m\right\}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

$$\tfrac{1}{2}p^{2h+2}M'_{2h+1} = 1^{2h+1/1}l.q^2 + 1^{2h+1/1}2d\sum_1^h\frac{(-p^2q^2)^n}{1^{2n/1}} + 1^{2h+1/1}2c\sum_1^{h+1}\frac{(pq)^{2n-1}}{1^{2n-1/1}} +$$
$$+2^{2h/1}\sum_1^{h+1}\left\{\frac{1}{1^{2n+1/1}}\sum_1^{n-1}1^{2n-2m+1/1}(-p^2q^2)^m\right\} +$$
$$+3^{2h-1/1}\sum_1^h\left\{\frac{1}{1^{2n/1}}\sum_0^{n-1}1^{2n-2m/1}(-p^2q^2)^m\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

17. Pour les intégrales au dénominateur q^4-x^4, nous avons les formules (12) et (13) à transformer. Des quatre formules dans (12) on ne peut employer que la R_3, puisque la transformation par le Théorème I du N°. 3 des trois premières donnerait des termes intégrés à dénominateur x^3, x^2 et x successivement, lesquelles donc pour la limite inférieure 0 de x deviendraient nécessairement infinies, ce qui rendrait le résultat indéterminé. Cette circonstance n'a pas lieu auprès de la quatrième, car on aura:

$$8\,R_3=\int_0^\infty e^{-px}\,d.l.(x^4-q^4)^2=e^{-px}\,l.(x^4-q^4)^2\Big\}_0^\infty-\int_0^\infty l.(x^4-q^4)^2\,(-p\,e^{-px}\,dx)\ ,$$

donc, puisque l'on voit aisément que le terme déjà intégré se réduit nécessairement à $-4\,l.q^2$, on obtient en réduisant:

$$\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q^4-x^4)^2\,dx=\frac{2}{p}(b+a+2d)+\frac{4}{p}\,l.q^2$$
$$=\frac{2}{p}(b+a+2d+2\,l.q^2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Ajoutons, que l'on aurait trouvé ce résultat de même par l'addition des formules (20) et (24).

Lorsque nous nommons l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-px}\,x^h\,l.(q^4-x^4)^2\,dx=R'_h\ ,$$

les quatre équations (13) donnent:

$$8R_{4h}=\int_0^\infty x^{4h-3}e^{-px}d.l.(q^4-x^4)^2=-\int_0^\infty l.(q^4-x^4)^2\Big\{-pe^{-px}x^{4h-3}+(4h-3)x^{4h-4}e^{-px}\Big\}dx,$$

$$8R_{4h+1}=\int_0^\infty x^{4h-2}e^{-px}d.l.(q^4-x^4)^2=-\int_0^\infty l.(q^4-x^4)^2\Big\{-pe^{-px}x^{4h-2}+(4h-2)x^{4h-3}e^{-px}\Big\}dx,$$

$$8R_{4h+2}=\int_0^\infty x^{4h-1}e^{-px}d.l.(q^4-x^4)^2=-\int_0^\infty l.(q^4-x^4)^2\Big\{-pe^{-px}x^{4h-1}+(4h-1)x^{4h-2}e^{-px}\Big\}dx,$$

$$8R_{4h+3}=\int_0^\infty x^{4h}\,e^{-px}d.l.(q^4-x^4)^2=-\int_0^\infty l.(q^4-x^4)^2\Big\{-pe^{-px}x^{4h}\ +\ 4h\ \ x^{4h-1}e^{-px}\Big\}dx.$$

Les termes intégrés sont de suite omis dans ces formules-ci, parcequ'ils ont évidemment une valeur nulle, d'après un raisonnement tout-à-fait égal à celui pour les cas précédents. Pour chaque forme de h, c'est-à-dire pour

les R_{4h}, R_{4h+1}, R_{4h+2}, R_{4h+3}, ces équations donnent précisement la même chose, savoir:

$$8\,R_{h+3} = -\int_0^\infty l.(q^4 - x^4)^2 \left\{ -p e^{-px} x^h + h x^{h-1} e^{-px} \right\} dx;$$

donc

$$8\,R_{h+3} = p R'_h - h R'_{h-1} \quad \text{ou} \quad p R'_h = h R'_{h-1} + 8\,R_{h+3}; \quad . \quad . \quad . \quad (z')$$

ce qui donne en application, attendu que la valeur de l'intégrale R'_0 est donnée par la formule (28), les expressions suivantes:

$$p\,R'_1 = 1.R'_0 + 8\,R_4,$$

$$p^2\,R'_2 = 1.2\,R'_0 + 2.8\,R_4 + 8\,p\,R_5,$$

$$p_3\,R'_3 = 1.2.3.R'_0 + 2.3.8\,R_4 + 3.8\,p\,R_5 + 8\,p^2\,R_6,$$

donc en général

$$p^h R'_h = 1^{h/1} R'_0 + 8\,.\,1^{h/1} \sum_1^h \frac{p^{m-1}}{1^{m/1}} R_{m+3},$$

ou bien, lorsqu'on remplace R'_0 par sa valeur (28),

$$p^{h+1} R'_h = 2\,.\,1^{h/1} \left\{ b + a + 2\,d + 2\,l.q^2 + h \sum_1^h \frac{p^m}{1^{m/1}} R_{m+3} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Si l'on préfère d'éviter la sommation des R_h, il faut observer d'abord que nécessairement il y aura différence entre les divers résultats pour les cas où h est de la forme $4h$, $4h+1$, $4h+2$, $4h+3$, puisque déjà les premiers termes des valeurs de R_h diffèrent entre eux, en ce qu'ils dépendent de $b-a$ et $a+b$, de c et d alternativement. Il vaudra donc mieux de faire d'abord cette distinction et de chercher la formule générale pour chaque cas en particulier. A cet effet l'on doit tenir les huit termes, qui appartiennent aux diverses valeurs de R_{4h}, R_{4h+1}, R_{4h+2}, R_{4h+3} respectivement, soigneusement séparés, et alors seulement on pourra en déduire les actes de progression, auxquels ces huit sommations sont assujetties, chacune pour soi, tant les quatre sommations simples que les quatre autres sommations doubles: et cela pour chacune des formes de h en particulier. Vu la complication nécessaire des résultats, nous ne transcrirons ici que les trois premières valeurs;

$$\left.\begin{aligned}
p^2 R'_1 &= 1.4l.q^2 + 2(a+b) + 2pq(b-a) - 4pqc \\
&\quad + 4d+8, \\
p^3 R'_2 &= 1.2.4l.q^2 + (1.2+p^2q^2)2(a+b) + 2pq(b-a) - 2.4pqc \\
&\quad + (1.2-p^2q^2)4d+8.3, \\
p^4 R'_3 &= 1.2.3\,4l.q^2 + (1.2.3+3p^2q^2)2(a+b) + (2.3+p^2q^2)2pq(b-a) - (2.3-p^2q^2)4pqc \\
&\quad + (1.2.3-3p^2q^2)4d+8.11.
\end{aligned}\right\} (30)$$

18. Ici l'on pourra faire la même remarque qu'au N°. 11, c'est-à-dire que par la substitution de x pour x^2 et x^4 — ce qui est évidemment permis à cause des mêmes raisons, discutées dans le Numéro cité — on connait aussi la valeur des intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty e^{-p\sqrt{x}}\; l.(q^2-x)^2 dx = 2\,G'_1 \quad , \quad \int_0^\infty e^{-p\sqrt{x}}\; l.(q^2-x)^2 dx.\sqrt{x} = 2\,G'_2 \quad ,$$

$$\int_0^\infty e^{-p\sqrt{x}} x^h l.(q^2-x)^2 dx = 2\,G'_{2h+1} \quad , \quad \int_0^\infty e^{-p\sqrt{x}} x^h l.(q^2-x)^2 dx.\sqrt{x} = 2\,G'_{2h+2} \quad ,$$

$$\int_0^\infty e^{-p\sqrt{x}}\; l.(q^2+x)^2 dx = 2\,M'_1 \quad , \quad \int_0^\infty e^{-p\sqrt{x}}\; l.(q^2+x)^2 dx.\sqrt{x} = 2\,M'_2 \quad ,$$

$$\int_0^\infty e^{-p\sqrt{x}} x^h l.(q^2+x)^2 dx = 2\,M'_{2h+1} \quad , \quad \int_0^\infty e^{-p\sqrt{x}} x^h l.(q^2+x)^2 dx.\sqrt{x} = 2\,M'_{2h+2} \quad ,$$

$$\int_0^\infty e^{-p\sqrt[4]{x}}\; l.(q^4-x)^2 dx = 4\,R'_3 \quad , \quad \int_0^\infty e^{-p\sqrt[4]{x}}\; l.(q^4-x)^2 dx.\sqrt{x} = 4\,R'_5 \quad ,$$

$$\int_0^\infty e^{-p\sqrt[4]{x}} x^h l.(q^4-x)^2 dx = 4\,R'_{4h+3} \quad , \quad \int_0^\infty e^{-p\sqrt[4]{x}} x^h l.(q^4-x)^2 dx.\sqrt{x} = 4\,R'_{4h+5} .$$

De ces deux séries, la première est la suite des intégrales analogues, trouvées dans les équations (14), (17) et (15), (19).

Toutes les intégrales, calculées dans les N°s 13 jusqu'ici, sont de la même forme: les intégrales sont entières, à un facteur exponentiel et un facteur logarithmique, et souvent encore à un troisième facteur algébrique; tandis que les intégrales analogues, à facteur algébrique de forme fractionnaire semblent être indéterminées. Mais au lieu de la fonction logarithmique, que l'on a fait entrer sous le signe d'intégration définie, l'on peut aussi quelquefois y introduire une fonction circulaire inverse par la même méthode.

---

19. Parce que l'on a $d_x . \text{Arctg.} \frac{x}{q} = \frac{q}{q^2 + x^2}$, la supposition de $f(x) = \text{Arctg.} \frac{x}{q}$ peut offrir au Théorème I de N°. 3 une application non moins intéressante, que celle qu'on a étudiée précédemment; parmi les formules citées et trouvées jusqu'ici, ils se trouvent qui se prètent à une telle transformation, savoir (III), (IV), (11), (*m*) et (*p*): voyons ce qui en résulte.

Les deux premières formules donnent:

$$q\int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{x^2+q^2} = \int_0^\infty e^{-px} d.\text{Arctg.}\frac{x}{q} = e^{-px}\text{Arctg.}\frac{x}{q}\Big\}_0^\infty - \int_0^\infty \text{Arctg.}\frac{x}{q}\Big\{-pe^{-px}dx\Big\},$$

$$q\int_0^\infty \frac{e^{-px}xdx}{x^2+q^2} = \int_0^\infty xe^{-px} d.\text{Arctg.}\frac{x}{q} = xe^{-px}\text{Arctg.}\frac{x}{q}\Big\}_0^\infty - \int_0^\infty \text{Arctg.}\frac{x}{q}\Big\{-pe^{-px}x+e^{-px}\Big\}dx.$$

Quant aux termes déjà intégrés, pour la limite inférieure 0 de x la valeur en est $1 . 0$ et $0 . 1 . 0$: donc zéro dans les deux cas. Pour l'autre limite supérieure ∞ de x, ils deviennent, puisque $\text{Arctg.}\, \infty = \frac{1}{2}\pi$, soit $\frac{\pi}{2} : \infty$ soit $\infty . \frac{\pi}{2} : \infty$: donc la première valeur est nulle, tandis que la seconde est donnée sous une forme indéterminée. Il faut donc y appliquer les règles usuelles: pour cela on peut ôter le facteur $\text{Arctg.} \frac{x}{q}$, parcequ'il est $\frac{1}{2}\pi$, constant: il reste donc:

$$\frac{x}{e^{px}} = \frac{1}{pe^{-px}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Les termes s'évanouissent donc dans les deux cas entre les limites de x, 0 et ∞, et l'on obtient, lorsqu'on substitue le premier résultat dans la seconde équation :

$$\int_0^\infty e^{-px}\,\text{Arctg.}\frac{x}{q}dx = \frac{1}{p}.q.\frac{c}{q} = \frac{c}{p}, \quad \ldots\ldots (31)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,\text{Arctg.}\frac{x}{q}.xdx = \frac{1}{p}\left(qd + \frac{c}{p}\right) = \frac{1}{p^2}(pqd + c) \quad \ldots\ldots (32)$$

Les intégrales (4) ensuite nous donnent ici par la même méthode :

$$qM_{2h} = \int_0^\infty e^{-px}x^{2h}d.\text{Arctg.}\frac{x}{q} = e^{-px}x^{2h}\,\text{Arctg.}\frac{x}{q}\Big\}_0^\infty$$
$$- \int_0^\infty \text{Arctg.}\frac{x}{q}\Big\{-pe^{-px}x^{2h} + 2hx^{2h-1}e^{-px}\Big\}dx,$$

$$q\,M_{2h+1} = \int_0^\infty e^{-px} x^{2h+1}\, d.\mathrm{Arctg.}\frac{x}{q} = e^{-px} x^{2h+1}\, \mathrm{Arctg.}\frac{x}{q}\Big\}_0^\infty$$
$$-\int_0^\infty \mathrm{Arctg.}\frac{x}{q}\Big\{-pe^{-px}x^{2h+1}+(2h+1)x^{2h}e^{-px}\Big\}\,dx.$$

Quant au terme intégré, pour la limite inférieure de x, il devient $1.0.0$, donc zéro, et pour la limite supérieure $0.\infty.\frac{\pi}{2}$ donc de forme indéterminée. En ôtant le facteur Arctg. $\frac{x}{q}$, constant dans ce cas et égal à $\frac{1}{2}\pi$, on a par la règle ordinaire

$$\frac{x^h}{e^{px}} = \frac{h\,x^{h-1}}{p\,e^{px}} = \ldots\ldots = \frac{1^{h/1}}{p^h e^{px}},$$

donc pour la limite ∞ de x ce terme devient $\frac{1^{h/1}}{p^h\,\infty} = 0$: donc les termes s'évanouissent pour les deux limites de x. Lorsqu'on nomme l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-px} x^h\, \mathrm{Arctg.}\frac{x}{q}\, dx = M''_h,$$

on voit clairement, que les deux équations précédentes coincident et reviennent à la seule formule

$$q\,M_h = p\,M''_h - h\,M''_{h-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (aa)$$

Or, puisque M''_0 est exprimée par intégrale (31), on a successivement:

$$p\,M''_1 = 1M''_0 + q\,M_1,$$
$$p^2 M''_2 = 1.2.M''_0 + 2.q\,M_1 + pq\,M_2,$$
$$p^3 M''_3 = 1.2.3.M''_0 + 2.3.q\,M_1 + 3pq\,M_2 + p^2 q\,M_3,$$

donc en général:

$$p^h M''_h = 1^{h/1} M''_0 + 1^{h/1} q \sum_1^h \frac{p^{n-1}}{1^{n/1}} M_n,$$

ou bien, en vertu de la valeur calculée de M''_0

$$p^{h+1} M''_h = 1^{h/1}\Big\{c + pq \sum_1^h \frac{p^{n-1}}{1^{n/1}} M_n\Big\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Lorsqu'au contraire on veut exprimer les M''_h, sans avoir recours aux M_h, il faut substituer les valeurs calculées des M''_h par l'équation (aa) et celles de M_h calculées par (11) successivement. A cause de la différence entre M_{2h} et M_{2h+1}, on doit ici aussi distinguer entre les intégrales M''_{2h} et

24

M''_{2h+1} non seulement, mais encore on doit tenir séparées les parties des expressions obtenues, que l'on doit à la substitution des M_{2h} de celles que l'on acquiert par les M_{2h+1}. De telle sorte enfin on trouvera les formules suivantes:

$$\begin{aligned} p^{2h+1}M''_{2h} = {} & 1^{2h|1}c\sum_0^h\frac{(-p^2q^2)^n}{1^{2n|1}}+1^{2h|1}pqd\sum_0^{h-1}\frac{(-p^2q^2)^n}{1^{2n+1|1}} \\ & +3^{2h-2|1}pq\sum_1^h\left\{\frac{1}{1^{2n|1}}\sum_0^{n-1}1^{2n-2m|1}\,(-p^2q^2)^m\right\} \\ & +4^{2h-3|1}pq\sum_1^h\left\{\frac{1}{1^{2n|1}}\sum_0^{n-1}1^{2n-2m-1|1}\,(-p^2q^2)^m\right\}, \quad .\ .\ .\ (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{2h+2}M''_{2h+1} = {} & 1^{2h+1|1}c\sum_0^h\frac{(-p^2q^2)^n}{1^{2n|1}}+1^{2h+1|1}pqd\sum_0^h\frac{(-p^2q^2)^n}{1^{2n+1|1}} \\ & +3^{2h-1|1}pq\sum_1^{h+1}\left\{\frac{1}{1^{2n+1|1}}\sum_0^{n-1}1^{2n-2m+1|1}\,(-p^2q^2)^m\right\} \\ & +4^{2h-2|1}pq\sum_1^h\left\{\frac{1}{1^{2n|1}}\sum_0^{n-1}1^{2n-2m|1}\,(-p^2q^2)^m\right\}.\ .\ .\ .\ .\ (35) \end{aligned}$$

Les intégrales (m) se transforment de la même manière dans les équations:

$$\left.\begin{aligned} qN_{k+1} &= \int_0^\infty\frac{e^{-px}dx}{(x^2+q^2)^k}d.\text{Arctg.}\frac{x}{q}=\frac{e^{-px}\text{Arctg.}\frac{x}{q}}{(x^2+q^2)^k}\Bigg\}_0^\infty-\int_0^\infty\text{Arctg.}\frac{x}{q}\left\{\frac{-pe^{-px}}{(x^2+q^2)^k}+e^{-px}\frac{-k.2x}{(x^2+q^2)^{k+1}}\right\}dx, \\ qO_{k+1} &= \int_0^\infty\frac{e^{-px}x\,dx}{(x^2+q^2)^k}d.\text{Arctg.}\frac{x}{q}=\frac{e^{-px}x\text{Arctg.}\frac{x}{q}}{(x^2+q^2)^k}\Bigg\}_0^\infty-\int_0^\infty\text{Arctg.}\frac{x}{q}\left\{\frac{e^{-px}-pe^{-px}x}{(x^2+q^2)^k}+xe^{-px}\frac{-k.2x}{(x^2+q^2)^{k+1}}\right\}dx, \\ &= \frac{e^{-px}x\text{Arctg.}\frac{x}{q}}{(x^2+q^2)^k}\Bigg\}_0^\infty-\int_0^\infty e^{-px}\text{Arctg.}\frac{x}{q}\,dx\left\{\frac{1-2k}{(x^2+q^2)^k}-\frac{px}{(x^2+q^2)^k}+\frac{2kq^2}{(x^2+q^2)^{k+1}}\right\}. \end{aligned}\right\}(bb)$$

Voyons d'abord ce que deviennent les fonctions déjà intégrées ici. Pour la limite inférieure $x = 0$, elles sont respectivement égales à $\frac{1.0}{q^{2k}}$ et $\frac{1.0.0}{q^{2k}}$, toutes deux zéro. Mais pour la limite supérieure $x = \infty$, elles deviennent $\frac{\frac{1}{2}\pi}{\infty.\infty}$ et $\frac{\infty.\frac{1}{2}\pi}{\infty.\infty}$: donc la premiere est nulle, et la seconde se présente sous une forme indéterminée; mais à raison du calcul précédent pour un cas parfaitement analogue, elle s'annulle de même: donc les termes intégrés s'évanouissent et pour les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-px}\,\text{Arctg.}\frac{x}{q}\frac{dx}{(x^2+q^2)^k} = \text{N}''_k\,,\quad \int_0^\infty e^{-px}\,\text{Arctg.}\frac{x}{q}\frac{x\,dx}{(x^2+q^2)^k} = \text{O}''_k\,,$$

les équations précédentes peuvent s'écrire comme suit:

$$\left.\begin{aligned} q\text{N}_{k+1} &= p\,\text{N}''_k + 2\,k\,\text{O}''_{k+1} \\ q\,\text{O}_{k+1} &= (2k-1)\,\text{N}''_k + p\,\text{O}''_k - 2\,kq^2\,\text{N}''_{k+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (cc)$$

Par l'élimination de O″ et N″ alternativement de la seconde équation à l'aide de leurs valeurs, tirées de la première, on obtient, après avoir diminué k d'une unité dans le second résultat:

$$\left.\begin{aligned} 4k(k-1)q^2\text{N}''_{k+1} - 2(k-1)(2k-1)\text{N}''_k + p^2\text{N}''_{k-1} &= pq\text{N}_k - 2(k-1)q\text{O}_{k+1} \\ 4k(k-1)q^2\text{O}''_{k+1} - 2(k-1)(2k-3)\text{O}''_k + p^2\text{O}''_{k-1} &= 2(k-1)q^3\text{N}_{k+1} - (2k-3)q\text{N}_k + pq\text{O}_k \end{aligned}\right\}(dd)$$

Tant pour la supposition de $k = 0$ que pour $k = 1$, ces formules ne donnent pour N''_1 et O''_1 que $\frac{0}{0}$, valeur indéterminée. Ces intégrales sont par suite dans le même cas, dont on a traité ci-dessus, par ex. au N°. 14.

---

20. Quoique d'un côté nous soyons parvenus à des résultats remarquables, et que d'un autre côté nous étions forcés de nous arrêter à quelques résultats indéterminés — le but principal de cette note était de faire valoir la fécondité du théorème déduit au N°. 3, dans un cas spécial. Et comme ici des intégrales (I), (II), (III), (IV) nous avons déduit nombre d'autres, il y a beaucoup de formules d'intégration définie auxquelles on peut appliquer le même Théorème, pourvu seulement, que les termes intégrés aient une valeur déterminée.

Mais on peut encore par le même chemin trouver des rélations entre diverses intégrales définies. Voyez ici quelques unes de ces formules déduites de ce que l'on a trouvé plus haut:

$$\int_0^\infty e^{-px}l\,.\,(q\pm x)^2\,\frac{2\,dx}{x\pm q} = e^{-px}\Big[l\,.\,(q\pm x)^2\Big]^2\Big\}_0^\infty - \\ -\int_0^\infty l\,.\,(q\pm x)^2\left\{-pe^{-px}l\,.\,(q\pm x)^2 + e^{-px}\frac{2}{x\pm q}\right\},$$

$$\int_0^\infty e^{-px}l.(q^2\pm x^2)^2\,\frac{4\,x\,dx}{x^2\pm q^2} = e^{-px}\Big[l.(q^2\pm x^2)^2\Big]^2\Big\}_0^\infty - \\ -\int_0^\infty l.(q^2\pm x^2)^2\left\{-pe^{-px}l.(q^2\pm x^2)^2 + e^{-px}\frac{2\,.\,2\,x}{x^2\pm q^2}\right\}.$$

Or les termes intégrés deviennent pour la limite inférieure de x: $1 \,.\, (l.q^2)^2$ et $1 \,.\, (l.q^4)^2$, et pour la limite supérieure $0 \,.\, \infty$. La règle ordinaire donne ici:

$$\frac{[l.(q\pm x)^2]^2}{e^{px}} = \frac{2\,.\,l.(q\pm x)^2 \dfrac{\pm 2}{q\pm x}}{p e^{px}} = \frac{4}{p}\,\frac{l.(q\pm x)^2}{e^{px}(q\pm x)} = \frac{4}{p}\,\frac{\pm 2}{p e^{px}(x\pm q) + e^{px}} =$$

$$= \frac{\pm 8}{p\,e^{px}(q\pm x)\{px \pm pq + 1\}},$$

$$\frac{[l.(q^2\pm x^2)^2]^2}{e^{px}} = \frac{2.l.(q^2\pm x^2)^2 \dfrac{\pm 2.2x}{q^2\pm x^2}}{p e^{px}} = \frac{8}{p}\,\frac{l.(q^2\pm x^2)^2}{e^{px}(x\pm q^2 x^{-1})} =$$

$$= \frac{8}{p}\,\frac{\dfrac{\pm 2.2x}{q^2\pm x^2}}{p e^{px}(x\pm q^2 x^{-1}) + e^{px}\{1\mp q^2 x^{-2}\}} = \frac{32}{p}\,\frac{x^3}{e^{px}\{px(x^2\pm q^2)^2 + x^4 - q^4\}}.$$

Quant à la première valeur, elle est évidemment nulle, et la seconde devient aussi zéro après trois différentiations successives, qui feront disparaître l'élément x du numérateur, et le rendront égal à $32.1.2.3$, tandis que la dénominateur reste du même degré, outre le facteur e^{px}. Donc on a

$$p\int_0^\infty e^{-px}[l.(q\pm x)^2]^2\,dx - 4\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,l.(q\pm x)^2\,dx}{x\pm q} = (l.q^2)^2 \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

$$p\int_0^\infty e^{-px}[l.(q^2\pm x^2)^2]^2\,dx - 8\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,l.(q^2\pm x^2)^2\,dx}{x^2\pm q^2} = (l.q^4)^2 \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

équations, qui peuvent s'écrire aussi:

$$\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q\pm x)^2\,\frac{p\,(x\pm q)\,(l.q\pm x)^2 - 4}{x\pm q} = (l.q^2)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q^2\pm x^2)^2\,\frac{p(x^2\pm q^2)\,l.(q^2\pm x^2)^2 - 8}{x^2\pm q^2} = (l.q^4)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Encore on aurait par un procédé analogue:

$$\int_0^\infty e^{-px}\mathrm{Arctg.}\frac{x}{q}\,\frac{q\,dx}{q^2\pm x^2} = e^{-px}\left[\mathrm{Arctg.}\frac{x}{q}\right]^2\Big\}_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{Arctg.}\frac{x}{q}\left\{-pe^{-px}\mathrm{Arctg.}\frac{x}{q} + e^{-px}\frac{q}{q^2\pm x^2}\right\}dx,$$

ou, parceque le terme intégré est nécessairement zéro pour les deux limites de x,

$$p\int_0^\infty e^{-px}\left[\text{Arctg.}\frac{x}{q}\right]^2 dx = 2q\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,\text{Arctg.}\frac{x}{q}\,dx}{q^2+x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

ou bien

$$\int_0^\infty e^{-px}\,\text{Arctg.}\frac{x}{q}\,\frac{p(x^2+q^2)\,\text{Arctg.}\frac{x}{q}-2q}{x^2+q^2}\,dx = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

21. Bien que nous ne soyons pas venus à bout de trouver des valeurs déterminées pour les intégrales C'_k, D'_k, H'_k, I'_k, N''_k, O''_k, nous pourrons facilement obtenir des formules qui leur ressemblent.

Car en premier lieu les équations (u') et (v') peuvent s'écrire comme suit:

$$\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q+x)^2\,\frac{px+(pq+k-1)}{(x+q)^k}\,dx = 2\,C_k + \frac{l.q^2}{q^{k-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q-x)^2\,\frac{px-(pq-k+1)}{(x-q)^k}\,dx = 2\,D_k + \frac{l.q^2}{(-q)^{k-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}.x^{h-1}\,l.(q+x)^2\,\frac{px^2+(pq-h+k-1)x-hq}{(x+q)^k}\,dx = 2\,E_{h,k} \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}.x^{h-1}\,l.(q-x)^2\,\frac{px^2-(pq-k+h-1)x+hq}{(x-q)^k}\,dx = 2\,F_{h,k} \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

Les deux premières formules nous donnent pour $k = 2$ un résultat spécial, dont nous aurons besoin dans la suite, savoir:

$$\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q+x)^2\,\frac{px+pq+1}{(x+q)^2}\,dx = 2\,C_2 + \frac{l.q^2}{q} = -2ap + \frac{1}{q}(2+l.q^2) \quad . \quad (46)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,l.(q-x)^2\,\frac{px-pq+1}{(x-q^2)}\,dx = 2\,D_2 - \frac{l.q^2}{q} = -2bp - \frac{1}{q}(2+l.q^2) \quad . \quad (47)$$

Pour $k = 1$ les deux dernières équations (44) et (45) au contraire, donnent un résultat identique avec les formules (16) et (19) respectivement, attendu que dans cette supposition la forme fractionnaire devient entière, mais pour $k = 2$ on obtient, en ôtant de la fraction la fonction entière qui s'y trouve comprise, et eu égard par rapport à cette forme entière aux intégrales (16) et (19), les équations suivantes:

$$\int_0^\infty e^{-px} x^{h-1} l.(q+x)^2 \frac{(pq+h-1)x+(hq+pq^2)}{(x+q)^2} = p\,A'_{h-1} - 2\,E_{h,2}, \quad . \quad . \quad (48)$$

$$\int_0^\infty e^{-px} x^{h-1} l.(q-x)^2 \frac{(pq-h+1)x+(hq-pq^2)}{(x-q)^2} = -\,p\,B'_{h-1} + 2\,F_{h,2} \quad . \quad (49)$$

Tout de même les équations (x') se transforment analoguement dans les deux formules suivantes:

$$\int_0^\infty e^{-px} l.(q^2-x^2)^2 \frac{px^2+(k-1)2x-pq^2}{(x^2-q^2)^k} = 4\,I_k + \frac{2\,l.q^2}{(-q^2)^k}, \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

$$\int_0^\infty e^{-px} l.(q^2-x^2)^2 \frac{px^3+(2k-3)x^2-pq^2x+q^2}{(x^2-q^2)^k} = 4\,(H_{k-1}+q^2\,H_k). \quad . \quad . \quad (51)$$

Comme on a trouvé précédemment la valeur des intégrales $E_{h,k}$, $I_{h,k}$, H_k, I_k, A'_h, B'_h, ou du moins que l'on a indiqué le chemin de les calculer, nous pouvons les regarder ici comme données, quoique nous n'en transcrivons pas les expressions, afin de ne pas devenir trop longs. Cette remarque regarde en même temps les valeurs qui suivent plus bas.

Mais en second lieu, on peut encore obtenir d'autres résultats, de la même manière, qu'au N°. 13, par l'application du même théorème aux intégrales (VII), (VIII), (9), (10), (g), (h), (l), c'est-à-dire en y supposant que $f(x)$ soit égale à $l.(q+x)^2$ ou à $l.(q-x)^2$. Cela nous mènera pour les formules (VII), et (VIII) aux équations suivantes:

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{x^2-q^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{x-q} d.l.(q+x)^2 = \left.\frac{e^{-px}l.(q+x)^2}{x-q}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty l.(q+x)^2 \left\{\frac{-pe^{-px}}{x-q} + e^{-px}\frac{-1}{(x-q)^2}\right\} dx,$$

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-px}dx}{x^2-q^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{x+q} d.l.(q-x)^2 = \left.\frac{e^{-px}l.(q-x)^2}{x+q}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty l.(q-x)^2 \left\{\frac{-pe^{-px}}{x+q} + e^{-px}\frac{-1}{(x+q)^2}\right\} dx,$$

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-px}x\,dx}{x^2-q^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}x}{x-q} d.l.(q+x)^2 = \left.\frac{e^{-px}x\,l.(q+x)^2}{x-q}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty l.(q+x)^2 \left\{\frac{e^{-px}-pe^{-px}x}{x-q} + e^{-px}x\frac{-1}{(x-q)^2}\right\} dx,$$

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-px}x\,dx}{x^2-q^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}x}{x+q} d.l.(q-x)^2 = \left.\frac{e^{-px}x\,l.(q-x)^2}{x+q}\right\}_0^\infty - \int_0^\infty l.(q-x)^2 \left\{\frac{e^{-px}-pe^{-px}x}{x+q} + e^{-px}x\frac{-1}{(x+q)^2}\right\} dx.$$

Lorsqu'on prend la peine de reprendre la discussion du N°. 12, on voit

tout de suite qu'elle s'applique nécessairement au cas actuel: de sorte que nous trouvons après quelque réduction:

$$\int_0^\infty e^{-px} l.(q+x)^2 \frac{px-pq+1}{(x-q)^2}\, dx = \frac{b-a}{q} - \frac{l.q^2}{q} = \frac{1}{q}\left\{b-a-l.q^2\right\} \quad . \;\; . \;\; . \quad (52)$$

$$\int_0^\infty e^{-px} l.(q-x)^2 \frac{px+pq+1}{(x+q)^2}\, dx = \frac{b-a}{q} + \frac{l.q^2}{q} = \frac{1}{q}\left\{b-a+l.q^2\right\} \quad . \;\; . \;\; . \quad (53)$$

$$\int_0^\infty e^{-px} l.(q+x)^2 \frac{px^2-pqx+q}{(x-q)^2}\, dx = a + b\,,$$

$$\int_0^\infty e^{-px} l.(q-x)^2 \frac{px^2+pqx-q}{(x+q)^2}\, dx = a + b\,.$$

Ces deux dernières ne sont qu'une conséquence nécessaire des formules (14) et (52), (15) et (53) respectivement. On peut prendre encore la somme de (46) et (53), de (47) et (52), savoir:

$$\int_0^\infty e^{-px} l.(q^2-x^2)^2 \frac{px+pq+1}{(x+q)^2}\, dx = \frac{1}{q}\left\{2+2\,l.q^2+b-a-2\,apq\right\} \quad . \;\; . \quad (54)$$

$$\int_0^\infty e^{-px} l.(q^2-x^2)^2 \frac{px-pq+1}{(x-q)^2}\, dx = \frac{1}{q}\left\{-2-2\,l.q^2+b-a-2bpq\right\} \quad . \;\; . \quad (55)$$

Quant aux autres intégrales mentionnées, (9), (10), (g), (h), (l) on obtient de la même manière, en prenant pour $f(x)$ tantôt $l.(q+x)^2$, tantôt $l.(q-x)^2$:

$$2\,\mathrm{G}_h = \int_0^\infty \frac{e^{-px}x^h}{x-q} d.l.(q+x)^2 = \frac{e^{-px}x^h\, l.(q+x)^2}{x-q}\Bigg\}_0^\infty -$$

$$- \int_0^\infty l.(q+x)^2 \left\{\frac{-pe^{-px}x^h + hx^{h-1}e^{-px}}{x-q} + e^{-px}x^h \frac{-1}{(x-q)^2}\right\} dx,$$

$$2\,\mathrm{G}_h = \int_0^\infty \frac{e^{-px}x^h}{x+q} d.l.(q-x)^2 = \frac{e^{-px}x^h l.(q-x)^2}{x+q}\Bigg\}_0^\infty -$$

$$- \int_0^\infty l.(q-x)^2 \left\{\frac{-pe^{-px} + hx^{h-1}e^{-px}}{x+q} + e^{-px}x^h \frac{-1}{(x+q)^2}\right\} dx,$$

$$2\mathrm{H}_{k+1} = \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(x^2-q^2)^k(x-q)} d.l.(q+x)^2 = \frac{e^{-px}\, l.(q+x)^2}{(x^2-q^2)^k(x-q)}\Bigg\}_0^\infty -$$

$$- \int_0^\infty l.(x+q)^2 \left\{\frac{-pe^{-px}}{(x^2-q^2)^k(x-q)} + e^{-px}\left(\frac{-1}{(x^2-q^2)^k(x-q)^2} + \frac{-k.\,2x}{(x^2-q^2)^{k+1}(x-q)}\right)\right\} dx,$$

$$2\mathrm{H}_{k+1}=\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(x^2-q^2)^k(x+q)}d.l.(q-x)^2=\frac{e^{-px}\,l.(q-x)^2}{(x^2-q^2)^k(x+q)}\Big\}_0^\infty-$$

$$-\int_0^\infty l.(q-x)^2\left\{\frac{-pe^{-px}}{(x^2-q^2)^k(x+q)}+e^{-px}\left(\frac{-1}{(x^2-q^2)^k(x+q)^2}+\frac{-k.\,2x}{(x^2-q^2)^{k+1}(x+q)}\right)\right\}dx,$$

$$2\,\mathrm{I}_{k+1}=\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x}{(x^2-q^2)^k(x-q)}d.l.(q+x)^2=\frac{e^{-px}\,x.l.(q+x)^2}{(x^2-q^2)^k\,(x-q)}\Big\}_0^\infty-$$

$$-\int_0^\infty l.(q+x)^2\left\{\frac{-\,pe^{-px}x+e^{-px}}{(x^2-q^2)^k(x-q)}+e^{-px}x\left(\frac{-1}{(x^2-q^2)^k(x-q)^2}+\frac{-k.\,2x}{(x^2-q^2)^k(x-q)^2}\right)\right\}dx,$$

$$2\,\mathrm{I}_{k+1}=\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x}{(x^2-q^2)^k(x-q)}d.l.(q-x)^2=\frac{e^{-px}\,x.l.(q-x)^2}{(x^2-q^2)^k\,(x+q)}\Big\}_0^\infty-$$

$$-\int_0^\infty l.(q-x)^2\left\{\frac{-pe^{-px}\,x+e^{-px}}{(x^2-q^2)^k\,(x+q)}+e^{-px}x\left(\frac{-1}{(x^2-q^2)^k(x+q)^2}+\frac{-k.\,2x}{(x^2-q^2)^{k+1}(x+q)}\right)\right\}dx,$$

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-px}x^h\,dx}{(x^2-q^2)^{k+1}}=\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^h}{(x^2-q^2)^k(x-q)}d.l.(q+x)^2=\frac{e^{-px}\,x^h\,l.(q+x)^2}{(x^2-q^2)^k(x-q)}\Big\}_0^\infty-$$

$$-\int_0^\infty l.(q+x)^2\left\{\frac{-pe^{-px}x^h+hx^{h-1}e^{-px}}{(x^2-q^2)^k(x-q)}+e^{-px}x^h\left(\frac{-1}{(x^2-q^2)^k(x-q)}+\frac{-k.\,2x}{(x^2-q^2)^{k+1}(x-q)}\right)\right\}dx,$$

$$2\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^h\,dx}{(x^2-q^2)^{k+1}}=\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^h}{(x^2-q^2)^k\,(x+q)}d.l.(q-x)^2=\frac{e^{-px}\,x^h\,l.(q-x)^2}{(x^2-q^2)^k\,(x+q)}\Big\}_0^\infty-$$

$$-\int_0^\infty l.(q-x)^2\left\{\frac{-pe^{-px}x^h+hx^{h-1}e^{-px}}{(x^2-q^2)^k\,(x+q)}+e^{-px}x^h\left(\frac{-1}{(x^2-q^2)^k(x+q)}+\frac{-k.\,2x}{(x^2-q^2)^{k+1}(x+q)}\right)\right\}dx.$$

Pour la limite inférieure 0 de x les termes intégrés dans les deux premières et les quatres dernières de ces équations ont pour valeur zéro, dans les deux autres au contraire: $\frac{l.q^2}{(-1)^{k+1}\,q^{2k+1}}$ et $\frac{l.q^2}{(-1)^k\,q^{2k+1}}$ respectivement. Pour la limite supérieure ∞ tous les termes se présentent sous forme indéterminée, et il faut avoir recours aux règles ordinaires dans ce cas. Quant au terme intégré dans la troisième et la quatrième équation, il revient alors à

$$\frac{l.(q\pm x)^2}{e^{px}(x^2-q^2)^k(x\mp q)}=\frac{\pm\,2\,:\,(q\,\pm\,x)}{pe^{px}(x^2-q^2)^k(x\mp q)+h2x(x^2-q^2)^{k-1}e^{px}(x\mp q)+e^{px}(x^2-{}^2q)^k}$$

$$=\frac{\pm\,1}{e^{px}(x^2-q^2)^{k-1}(x\pm q)\left\{px^3+(2k\mp p+1)x^2-(pq\pm 2k)q\,x\pm pq^3-q^2\right\}},$$

donc la valeur en est zéro. Pour les six autres équations on peut mettre le terme sous la valeur générale:

$$\frac{l.(q\pm x)^2}{e^{px}x^{-h}(x^2-q^2)^k(x\mp q)} =$$

$$= \frac{\pm 2 : (q \pm x)}{pe^{px}x^{-h}(x^2-q^2)^k(x\mp q)+hx^{-h-1}(x^2-q^2)^k(x\mp q)e^{-px}+k.2x(x^2-q^2)^{k-1}e^{px}x^{-h}(x\mp q)+e^{-px}x^{-h}.(x^2-q^2)^k}$$

$$= \frac{2\,x^{h+1}}{e^{px}(x^2-q^2)^{k-1}(x\pm q)\left\{px^4+(2k-h+1\mp p)x^3-(pq\pm 2k\mp h)q\,x^2+(h-1\pm pq)q^2x\mp hq^3\right\}}.$$

Si l'on continue à présent la différentiation, le numérateur se réduit enfin à $1^{h+1/1}$: donc le terme est nul pour la limite ∞ de x. Donc les équations précédentes deviennent:

$$\int_0^\infty e^{-px}x^{h-1}l.(q+x)^2\frac{px^2-(pq+h-1)x+hq}{(x-q)^2}dx = 2G_h\,, \quad \ldots \quad (56)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}x^{h-1}l.(q-x)^2\frac{px^2+(pq-h+1)x-hq}{(x+q)^2}dx = 2G_h\,, \quad \ldots \quad (57)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}l.(q+x)^2\frac{px^3-(pq-2k-1)x^2-(pq+2k)qx+pq^3-q^2}{(x^2-q^2)^{k+1}(x-q)^2}dx = 2H_{k+1}+(-1)^{k+1}\frac{l.q^2}{q^{2k+1}}, \quad (58)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}l.(q-x)^2\frac{px^3+(pq+2k+1)x^2-(pq-2k)qx-pq^3-q^2}{(x^2-q^2)^{k+1}(x+q)^2}dx = 2H_{k+1}+(-1)^{k+1}\frac{l.q^2}{q^{2k+1}}, \quad (59)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}l.(q+x)^2\frac{px^4-pqx^3-(pq^2-q-2k)x^2+(pq^2-2k)qx-q^3}{(x^2-q^2)^{k+1}(x-q)^2}dx = 2\,I_{k+1}\,, \quad . \quad (60)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}l.(q-x)^2\frac{px^4+pqx^3-(pq^2+q-2k)x^2-(pq^2-2k)qx+q^3}{(x^2-q^2)^{k+1}(x+q)^2}dx = 2\,I_{k+1}\,, \quad . \quad (61)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}l.(q+x)^2\frac{px^4-(pq+h-1)x^3-(pq^2-hq-2k)x^2+(pq^2+hq-q-2k)qx-hq^3}{(x^2-q^2)^{k+1}(x-q)^2}dx =$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^h\,dx}{(x^2-q^2)^{k+1}}\,, \quad \ldots \quad (62)$$

$$\int_0^\infty e^{-px}l.(q-x)^2\frac{px^4+(pq-h+1)x^3-(pq^2+hq-2k)x^2-(pq^2-hq+q-2k)qx+hq^3}{(x^2-q^2)^{k+1}(x+q)^2}dx =$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{e^{-px}\,x^h\,dx}{(x^2-q^2)^{k+1}} \quad \ldots \quad (63)$$

Dans les intégrales (56) et (57) nous avons expressément omis de faire attention à la différence entre les G_{2h} et G_{2h+1}, parceque la réduction ne change pas pour ces deux cas; la même observation vaut des intégrales (62), (63), qui pour h de la forme $2h$ ou $2h+1$ sont respectivement égales à $K_{h,k+1}$ et $L_{h,k+1}$. Nous pouvons en déduire des résultats un peu plus simples en prenant la différence de (60) et (58) et le somme de (59) et (61), c'est-à-dire après quelques réductions:

$$\int_0^\infty e^{-px} l.(q+x)^2 \frac{px^2+2kx-pq^2}{(x^2-q^2)^{k+1}}\,dx = 2\,I_{k+1} - 2q H_{k+1} + (-1)^k \frac{2l.q^2}{q^{2k}}, \quad \ldots \quad (64)$$

$$\int_0^\infty e^{-px} l.(q-x)^2 \frac{px^2+2kx-pq^2}{(x^2-q^2)^{k+1}}\,dx = 2\,I_{k+1} + 2q H_{k+1} + (-1)^k \frac{2l.q^2}{q^{2k}}; \quad \ldots \quad (65)$$

dont la somme donne de nouveau

$$\int_0^\infty e^{-px} l.(q^2-x^2)^2 \frac{px^2+2kx-pq^2}{(x^2-q^2)^{k+1}}\,dx = 4\,I_{k+1} + (-1)^k \frac{4l.q^2}{q^{2k}} \quad \ldots \quad (66)$$

22. Observons encore que les équations (bb) peuvent s'écrire:

$$\int_0^\infty e^{-px} \,\text{Arctg.}\frac{x}{q} \frac{px^2+2kx+pq^2}{(x^2+q^2)^{k+1}}\,dx = q\,N_{k+1}, \quad \ldots \quad (67)$$

$$\int_0^\infty e^{-px} \,\text{Arctg.}\frac{x}{q} \frac{px^3+(2k-1)x^2+pq^2x-q^2}{(x^2-q^2)^{k+1}}\,dx = q\,O_{k+1} \quad \ldots \quad (68)$$

Enfin lorsqu'on applique la transformation du N°. 19 aux intégrales R_h, on aura, sans faire attention aux diverses formes de h, ce qui n'est d'aucune influence sur la réduction actuelle:

$$q\,R_h = \int_0^\infty \frac{e^{-px} x^h}{x^2-q^2}\, d.\,\text{Arctg.}\frac{x}{q} = \left.\frac{e^{-px} x^h \,\text{Arctg.}\frac{x}{q}}{x^2-q^2}\right\}_0^\infty$$
$$-\int_0^\infty \text{Arctg.}\frac{x}{q}\left\{\frac{-p\,e^{-px} x^h + h x^{h-1} e^{-px}}{x^2-q^2} + e^{-px} x^h \frac{-2x}{(x^2-q^2)^2}\right\}.$$

Le terme intégré est nul tout comme ci-dessus, pour les deux limites de x et l'on a par suite:

$$\int_0^\infty e^{-px} x^{h-1} \,\text{Arctg.}\frac{x}{q} \frac{px^3-(h-2)x^2-pq^2x+hq^2}{(x^2-q^2)^2}\,dx = q\,R_h \quad \ldots \quad (99)$$

Par le procédé suivant on peut acquérir des formules analogues un peu plus simples. Il est évident que

$$R_{h+1} \mp q R_h = \int_0^\infty \frac{e^{-px} x^h}{x \pm q} \frac{dx}{x^2+q^2} :$$

cette formule, assujettie à la même transformation que la précédente donnera un terme déjà intégré, qui sera nul par un raisonnement analogue: donc on trouve de suite

$$\int_0^\infty \text{Arctg.} \frac{x}{q} \left\{ \frac{hx^{h-1} e^{-px} - pe^{-px} x^h}{x \pm q} + e^{-px} x^h \frac{-1}{(x \pm q)^2} \right\} dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-px} x^{h-1} \text{Arctg.} \frac{x}{q} \frac{px^2 + (\pm pq - h + 1) x \mp hq}{(x \pm q)^2} dx = q R_{h+1} \mp q^2 R_h,$$

ou, en introduisant l'intégrale M''_h, connue par la formule (33),

$$\int_0^\infty e^{-px} x^{h-1} \text{Arctg.} \frac{x}{q} \frac{(\pm pq + h - 1)\, x + (pq^2 \pm hq)}{(x \pm q)^2} dx = M''_{h-1} - qR_{h+1} \pm q^2 R_h. \quad (70)$$

23. *Remarque.* Au N°. 3 on a observé qu'on étudierait quelques intégrales, où il y aurait discontinuité pour la fonction déjà intégrée entre les limites de la variable: mais aussi, que la correction introduite par cette discontinuité, serait nulle dans tous les cas: — il faudra démontrer cet énoncé.

Commençons par les intégrales C_k, $F_{k,h}$; le terme intégré a pour forme générale:

$$\frac{x^h e^{-px}}{(x-q)^k} = e^{-px} x^h (x-q)^{-k} = x^h e^{-px - \frac{1}{2} k l.(x-q)^2}.$$

La correction à ajouter serait donc:

$$\Delta' = \text{Lim.} \left[(q-\varepsilon)^h e^{-p(q-\varepsilon) - \frac{1}{2} k l.\varepsilon^2} - (q+\varepsilon)^h e^{-p(q+\varepsilon) - \frac{1}{2} k l.\varepsilon^2} \right]$$

$$: e^{-pq} \text{Lim.} \left[(q-\varepsilon)^h e^{p\varepsilon - \frac{1}{2} k l.\varepsilon^2} - (q+\varepsilon)^h e^{-p\varepsilon - \frac{1}{2} k l.\varepsilon^2} \right]$$

$$= e^{-pq} \text{Lim.} \Big[\left\{ q^h + \tbinom{h}{2} q^{h-2} \varepsilon^2 + \ldots \right\} \left(e^{p\varepsilon - \frac{1}{2} k l.\varepsilon^2} - e^{-p\varepsilon - \frac{1}{2} k l.\varepsilon^2} \right)$$

$$- \varepsilon \left\{ \tbinom{h}{1} q^{h-1} + \tbinom{h}{3} q^{h-3} \varepsilon^2 + \ldots \right\} \left(e^{p\varepsilon - \frac{1}{2} k l.\varepsilon^2} + e^{-p\varepsilon - \frac{1}{2} k l.\varepsilon^2} \right) \Big];$$

or, on sait que

$$e^{p\varepsilon - \frac{1}{2}kl.\varepsilon^2} = 1 + \frac{p\varepsilon - \frac{1}{2}kl\varepsilon^2}{1} + \frac{(p\varepsilon - \frac{1}{2}kl\varepsilon^2)^2}{1\,.\,2} + \frac{(p\varepsilon - \frac{1}{2}kl\varepsilon^2)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

$$e^{-p\varepsilon - \frac{1}{2}kl.\varepsilon^2} = 1 + \frac{-p\varepsilon - \frac{1}{2}kl\varepsilon^2}{1} + \frac{(-p\varepsilon - \frac{1}{2}kl\varepsilon^2)^2}{1\,.\,2} + \frac{(-p\varepsilon - \frac{1}{2}k.l\varepsilon^2)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

donc

$$e^{p\varepsilon - \frac{1}{2}kl\varepsilon^2} - e^{-p\varepsilon - \frac{1}{2}kl\varepsilon^2} = \frac{2p\varepsilon}{1} + \frac{-2p\varepsilon kl\varepsilon^2}{1.2} + \ldots = 2\varepsilon\left\{\frac{p}{1} - \frac{pkl\varepsilon^2}{1.2} + \ldots\right\},$$

$$e^{p\varepsilon - \frac{1}{2}kl\varepsilon^2} + e^{-p\varepsilon - \frac{1}{2}kl\varepsilon^2} = 2 - \frac{kl\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{4p^2\varepsilon^2 + k^2(l\varepsilon^2)^2}{1.2} - \ldots,$$

de sorte que l'on a

$$\Delta' = e^{-pq}\,\text{Lim.}2\varepsilon\left[\left\{q^h + \binom{h}{2}q^{h-2}\varepsilon^2 + \ldots\right\}\left\{\frac{p}{1} - \frac{pkl\varepsilon^2}{1.2} + \ldots\right\} - \right.$$

$$\left. - \left\{\binom{h}{1}q^{h-1} + \binom{h}{3}q^{h-3}\varepsilon^2 + \ldots\right\}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{kl\varepsilon^2}{1} + \frac{1}{4}\frac{4p^2\varepsilon^2 + k^2(l\varepsilon^2)^2}{1.2} - \ldots\right\}\right].$$

Or, je dis que cette limite est zéro, car il n'y entre que des termes de la forme $q^l\varepsilon$, $q^l\varepsilon^m$, $q^l\varepsilon^m\,(l\varepsilon)^n$. La limite des deux premières expressions est évidemment zéro: mais aussi c'est la limite nécessaire de la dernière, qui ce présente sous la forme indéterminée $0^m.\ \infty^n$: car l'on a suivant la règle ordinaire

$$\varepsilon^m (l\varepsilon)^n = \frac{(l\varepsilon)^n}{\varepsilon^{-m}} = \frac{n\,(l\varepsilon)^{n-1}}{-m\,\varepsilon^{-m-1}}\,\frac{1}{\varepsilon} = \frac{-n}{m}\,\frac{(l\varepsilon)^{n-1}}{\varepsilon^{-m}}$$

donc en continuant la différentiation $n - 1$ fois : $\dfrac{1^{n/1}}{(-m)^n}\,\dfrac{1}{\varepsilon^{-m}} = \dfrac{1^{n/1}}{(-m)^n}\,\varepsilon^m$

d'où l'on conclut que, cette limite étant zéro, on aura aussi

$$\Delta' = 0$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour les intégrales G, H, I, K et L, le terme intégré a la forme générale ;

$$\frac{x^h\,e^{-px}}{(x^2 - q^2)^k} = x^h\,e^{-px - \frac{1}{2}kl(x+q)^2 - \frac{1}{2}kl(x-q)^2}$$

on a donc ici de la même manière que plus-haut

$$\Delta' = e^{-pq}\,\text{Lim.}\Bigg[\left\{q^h + \binom{h}{2} q^{h-2}\varepsilon^2 + \ldots\right\}\left\{e^{p\varepsilon - \frac{1}{2}k\,l.(2q-\varepsilon)^2 - \frac{1}{2}k\,l.\varepsilon^2} - e^{-p\varepsilon - \frac{1}{2}k\,l.(2q+\varepsilon)^2 - \frac{1}{2}k\,l.\varepsilon^2}\right\} -$$

$$- \varepsilon\left\{\binom{h}{1} q^{h-1} + \binom{h}{3} q^{h-3}\varepsilon^2 + \ldots\right\}\left\{e^{p\varepsilon - \frac{1}{2}k\,l.(2q-\varepsilon)^2 - \frac{1}{2}k\,l\varepsilon^2} + e^{-p\varepsilon - \frac{1}{2}k\,l.(2q+\varepsilon)^2 - \frac{1}{2}k\,l\varepsilon^2}\right\}\Bigg];$$

or on a

$$p\varepsilon - k\,l.(2q-\varepsilon) - k\,l\,\varepsilon = r = p\varepsilon - k\frac{-\varepsilon^2 + 2q\varepsilon - 1}{1} + k\frac{(-\varepsilon^2 + 2q\varepsilon - 1)^2}{1.2} - \ldots,$$

$$-p\varepsilon - k\,l.(2q-\varepsilon) - k\,l\,\varepsilon = s = p\varepsilon - k\frac{+\varepsilon^2 + 2q\varepsilon - 1}{1} + k\frac{(\varepsilon^2 + 2q\varepsilon - 1)^2}{1.2} - \ldots;$$

donc

$$e^r - e^s = 1 - 1 + \frac{r-s}{1} + \frac{r^2 - s^2}{1.2} + \frac{r^3 - s^3}{1.2.3} + \ldots = (r-s)\left(1 + \frac{r+s}{1.2} + \frac{r^2 + 2rs + s^2}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$= 2p\varepsilon - k\frac{-2\varepsilon^2}{1} + k\frac{4\varepsilon(2q\varepsilon - 1)}{1.2} - \ldots\left\{1 + \ldots\right\},$$

$$e^r + e^s = 2 + \frac{r+s}{1} + \ldots = 2 - 2k\frac{-q\varepsilon - 1}{1} + \ldots,$$

d'où enfin

$$\Delta' = e^{-pq}\,\text{Lim.}\,2\varepsilon\Bigg[\left\{q^h + \binom{h}{2} q^{h-2}\varepsilon^2 + \ldots\right\}\left\{p + k\varepsilon + k\varepsilon(2q\varepsilon - 1) + \ldots\right\}$$

$$+ \left\{\binom{h}{1} q^{h-1} + \binom{h}{3} q^{h-3}\varepsilon^2 + \ldots\right\}\left\{1 - k(2q\varepsilon - 1) + \ldots\right\}\Bigg],$$

et l'on voit qu'ici de même Δ' a zéro pour limite. Un raisonnement tout-à-fait analogue donnerait le même résultat pour le cas des intégrales S, T, U, V á dénominateur $(x^4 - q^4)^k$.

Quant aux formules des N°s 12 à 18, on trouve en outre sous le signe d'intégration définie le facteur $l.(q+x)^2$, $l.(q-x)^2$, $l.(q^2-x^2)^2$, $l.(q^2+x^2)^2$, $l.(q^4-x^4)^2$, dont le premier et le quatrième ne deviennent pas discontinues: les trois autres au contraire

$$l.(q-x)^2\ ,\ l.(q^2-x^2)^2 = l.(q+x)^2 + l.(q-x)^2\ ,$$

$$l.(q^4-x^4)^2 = l.(q^2+x^2)^2 + l.(q+x)^2 + l.(q-x)^2$$

sont bien dans ce cas, et toutes par la fonction $l.(q-x)^2$ seulement. Celle-ci fait entrer sous la limite les deux termes $l.\varepsilon^2$ et $l.(-\varepsilon)^2 = l.\varepsilon^2$ comme facteurs: le raisonnement reste donc le même, ainsi que la discussion sur la valeur des termes, qui se présentent sous une forme indéterminée: et la limite devient encore zéro.

Les mêmes observations valent aussi pour les autres intégrales, déduites aux N°s 20—22, parceque le raisonnement continue toujours de manière analogue.

Il est donc démontré, que la correction s'annulle ici, qui est nécessairement due à la discontinuité du terme intégré auprès de quelques-uns des résultats que nous avons déduits, et par suite qu'elle n'a pas d'influence: pour les intégrales, dont il n'a pas été fait mention ici, ce cas de discontinuité n'a pas lieu.

BIJDRAGE

TOT DE

ZIEKTEKUNDIGE ONTLEEDKUNDE DER TANDEN

DOOR

H. J. HALBERTSMA.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

MET VIJF PLATEN.



AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1855.

BIJDRAGE

TOT DE

ZIEKTEKUNDIGE ONTLEEDKUNDE DER TANDEN

DOOR

H. J. HALBERTSMA.

Onder de weefsels van het dierlijk organisme, welke in lateren tijd vooral de opmerkzaamheid van den natuurkundige tot zich hebben getrokken, behooren, behalve zoo vele andere, ook die welke de tanden zamenstellen. Zoowel vergelijkend-ontleedkundig als mikroskopisch heeft men den bouw der tanden onderzocht en men is hierbij ontegenzeggelijk tot eenen rijkdom in kennis geraakt, die bij zoo menig ander gedeelte gunstig afsteekt. Vooral door de onderzoekingen van RICHARD OWEN, die de tanden uit een vergelijkend-ontleedkundig oogpunt beschouwde en hierbij het mikroskopisch onderzoek, als onmisbaar vereischte, op den voorgrond stelde, is in dit gedeelte der natuurkunde oneindig veel aan het licht gekomen, wat vroeger of in het geheel niet of slechts ten deele bekend was. Wij weten dat in de volkomenste tanden drie soorten van weefsels voorkomen: de *dentine,* het *email* en het *cement.* OWEN heeft ons geleerd hoe de eerstgenoemde bij de dieren twee wijzigingen kan ondergaan: de eene waarbij zich in dezelve, behalve de gewone elementen, *vaatkanaaltjes* voegen, die het kenmerk van de zoogenaamde *vasodentine* uitmaken; de andere waarbij de tandstof laagsgewijs om de pulpa wordt afgezonderd, beenholten in zich opneemt en in bouw met de beenderen veel overeenkomst aanbiedt. Hij noemde deze laatste wijziging de

26

osteodentine. De groote Engelsche ontleedkundige leerde ons bovendien dat de zuivere dentine in het dierenrijk trapsgewijs tot vasodentine en deze tot osteodentine overgaat.

Sinds Owen zijne Odontographie uitgaf en zijn artikel *Teeth* in de *Cyclopaedia of Anat. and Phys.* mededeelde, stond echter het mikroskoop niet stil: men heeft door voortgezet onderzoek aan sommige zaken eene andere beteekenis leeren geven en nieuwe elementen in den tand gevonden, die aan het oog van vroegere waarnemers waren ontsnapt. Men zal niet van mij vergen dat ik hier trede in de beschouwing van alle ontdekkingen, die op dit gebied gemaakt zijn; alleen wil ik, ten einde het bovengemelde te staven, gewag maken van de *tandbuisjes* en de *Purkinjesche ligchaampjes,* die men vroeger als *kalkvoerende ruimten* beschouwde, doch tegenwoordig als *kanalen* en *holten* laat gelden, waarin zich het *plasma* bevindt dat de stofwisseling in den tand moet onderhouden. Evenmin mag ik de ontdekking van de zoogenaamde *tandkogels* of *globuli dentis* verzwijgen, die met de formatie van de dentine in een naauw verband schijnen te staan, doch als zoodanig kunnen persisteren en aanleiding geven tot de *interglobulair-ruimten.*

Wat met zoo veel regt van de ontleedkunde der tanden in hunnen normaal-staat werd beweerd, is van geene toepassing op den ziekelijken toestand. De kennis die wij bezitten van de pathologische veranderingen, welke de tandweefsels kunnen ondergaan, mag men nog als vrij onvolledig beschouwen en de oorzaak laat zich niet ver zoeken. Het materiëel toch is hier uiterst schaarsch: behalve cariës en de verdikking der cementlaag zijn pathologische specimina zeldzaam te noemen; zij komen in den regel slechts in verzamelingen voor en dan nog zonder behoorlijke ziektegeschiedenis, zonder de naburige deelen, met name de pulpa, die in een zoo naauw verband staat tot de dentine, waartoe zich de veranderingen in bouw bijna uitsluitend bepalen. Het is dus wel niet te verwonderen dat mikroskopische onderzoekingen over dit onderwerp nog niet dien graad van volkomenheid erlangd hebben, welken men anders zoude mogen verwachten. De opstellen hierop betrekkelijk zijn meestal verspreid, en slechts in den allerlaatsten tijd heeft Carl Wedl in zijne *Grundzüge der pathologischen Histologie* een afzonderlijk hoofdstuk aan de nieuwvormingen der tandzelfstandigheden gewijd.

De rijke verzameling van ziekelijke tanden in het anatomische kabinet der Leidsche Hoogeschool, welke wel is waar bijna uitsluitend uit het dierenrijk ontleend, doch daarom niettemin als zeer belangrijk te beschouwen is, stelde mij in staat, veel, wat op pathologische verandering der tanden betrekking

heeft, opzettelijk na te gaan en mikroskopisch te onderzoeken. Veel nieuws is hierbij niet aan het licht gekomen; in enkele praeparaten ontmoette ik echter vormelementen, door andere werd ik op daadzaken geleid, die zoo ik mij niet bedrieg, tot nog toe waren voorbijgezien. In elk geval rekende ik het niet geheel ongepast de resultaten mijner waarnemingen aan de Koninklijke Akademie van Wetenschappen mede te deelen, en het zij mij dus vergund mijne spreekbeurt te vervullen door eene *bijdrage* te leveren *tot de ziektekundige ontleedkunde der tanden.* Ik zal hierdoor gelegenheid hebben om achtereenvolgens te handelen over de *exostosen der tanden,* over *de genezing van tandbreuken,* en over *de regeneratie der tandweefsels.* De cariës der tanden is in den lateren tijd het onderwerp van zoo vele opzettelijke monographiën geweest, de woekering van het cement is een zoo algemeen en bekend verschijnsel, dat ik gemeend heb deze met stilzwijgen te mogen voorbijgaan, te meer, daar ik niet te veel van uw geduld kan vorderen. Mijn wensch is, dat gij M.H. deze bijdrage zult gelieven te beschouwen als eene eersteling, in deze Akademie door een uwer jongste medeleden uitgesproken, en dat gij hem dus met die toegeeflijkheid zult aanhooren en met die mildheid beoordeelen, waarop hij hoopt eenige aanspraak te hebben.

I. OVER EXOSTOSEN DER TANDEN.

Onder exostosen moet men, gelijk de naam uitdrukt, eigentlijk een beenuitgroeisel verstaan en het kan dus minder gepast schijnen dit woord toe te passen op woekeringen die van de dentine van den een of anderen tand uitgaan. Het gebruik heeft echter deze uitdrukking, zoo het schijnt, gewettigd, en ik zie dus geene noodzakelijkheid hiervoor eene andere benaming te kiezen; mogelijk ware het anders beter van exodontose in plaats van exostose te spreken, vooral in die gevallen, waarin men meer het karakter van dentine dan van ware beenzelfstandigheid terugvindt.

De exostosen steken altijd meer of min in de holte van den tand uit en vernaauwen hare uitgebreidheid; aan de buitenvlakte zijn zij in den regel niet waarneembaar; hoogstens mag men uit de aanwezigheid van eenige zwarte strepen en scheurtjes of uit de verbrijzeling der schors in oliphantstanden tot het bestaan van eene inwendige exostose besluiten. Gelijk GALLANDAT *

* *Verhandelingen van het Zeeuwsch Genootschap,* D. IX 1782 pag. 351.

reeds deed opmerken, kan dit kenteeken voor ivoor-handelaars en bewerkers van belang worden.

De gedaante der exostosen is verschillend. Het eenvoudigste doen zij zich voor als bultige verhevenheden aan de binnenvlakte der dentine, waarop zich in grootere tanden en bij sterkere ontwikkeling wratvormige uitsteeksels bevinden. In andere gevallen hebben zij het voorkomen van druipsteen, waarbij zij zich, of naaldvormig en scherptoeloopende in de tandholte verheffen, of knobbelvormig eindigen en door dwarse uitsteeksels met elkander vereenigd worden *. Welke buitengemeene ontwikkeling deze exostosen bij den oliphant kunnen erlangen bewijst ons een geval uit het Anat. Kabinet onzer Hoogeschool (N°. 1243 Brugmans) waarin zij, van de gezonde zelfstandigheid gescheiden, eene lengte bereikt van 27 Cm., terwijl eene der grootste dwarsche afmetingen niet minder dan 10 Cm. bedraagt. Haar gewigt is 530 grm. Op de doorsnede vertoonen zich de exostosen gewoonlijk anders dan de gezonde dentine. Het blijkt dat dezelve in den oliphantstand in den regel uit eene doorschijnende en eenigzins geelgekleurde stof bestaan, die duidelijk afsteekt bij de melkwitte kleur van de dentine, welke in vele gevallen de primitieve ziekelijke woekering omgeeft.

De oorzaak dezer uitgroeisels is in sommige gevallen waarneembaar; in andere gevallen daarentegen laat zij zich niet opsporen. Heeft het eerste plaats, dan kunnen wij als zoodanig een vreemd ligchaam erkennen, dat op de eene of andere wijze in den tand is geraakt. Het duidelijkste wordt dit aangetoond bij de slagtanden van den oliphant, waar wij dikwijls als kern der nieuwvorming eenen geweerkogel aantreffen; het is duidelijk dat zich hier de ziekelijke tandstof om den kogel als het vreemde ligchaam afgezet heeft. Deze kogels kunnen op geene andere wijze in de tandholte geraken, dan door eene uitwendige beleediging; somtijds bevindt zij zich juist daar,

* In menschelijke tanden komen ossificatiën der pulpa voor zonder zamenhang met den tand. Het komt mij waarschijnlijk voor, dat dit ook bij dieren kan plaats vinden en dat zelfs sommige exostosen altijd onafhankelijk ontstaan om eerst later eene vereeniging aan te gaan met de dentine van den tand. Onder de vele tandpraeparaten bij dieren, welke ik gelegenheid had te onderzoeken, bevond er zich echter niet een, waarbij met zekerheid kon worden gezegd dat de nieuwvorming zich vrij in eene tandholte had bevonden. Het laat zich ook verwachten dat ossificatiën der pulpa, welke zonder zamenhang in den tand voorhanden waren, althans bij den oliphant gemakkelijker verloren gaan en dus hoogst zeldzaam tot ons zullen komen. Men moet hierbij niet uit het oog verliezen, dat ziekelijke producten van dien aard meestal eerst door de handen van de ivoorwerkers moeten gaan, alvorens dezelve in onze kabinetten geraken.

waar dezelve door het schietgeweer is binnen gedreven en kan men de opening, die aan het vreemde ligchaam en de exostose beantwoordt, in de schors van den tand aantoonen; in andere gevallen moet dezelve op eene geheel andere plaats zijn binnengetreden, althans in de omgeving wordt aan de buitenvlakte geenerlei verwonding gezien. Dit zal dan geschieden, wanneer het dier jong was en de tand zijne latere grootte nog niet erlangd had op het oogenblik, dat de kogel digt bij den wortel binnendringt, hetzij dat deze verwonding geschiedt met of zonder gelijktijdige doorboring van den alveolus. In elk geval zal dezelve, in de holte gekomen, zich door de pulpa eenen weg in de rigting van de kroon of het scherpe uiteinde banen, om ten laatste tegen de harde dentine-massa te stuiten. Hier werkt de kogel als vreemd ligchaam en wijzigt de om hem uitgezweete of hardwordende dentine. Owen verwijst * op dusdanige gevallen, waarin duidelijk de plaats der beleediging werd waargenomen en die dan natuurlijk tusschen wortel en exostose zal moeten gelegen zijn.

Ons hooggeacht medelid Prof. G. Vrolik † geeft nog eene andere verklaring van de zaak, die eenigzins verschilt van de laatst vermelde. Wij moeten hierbij tot een nog vroeger tijdperk van het leven van den oliphant teruggaan, waarin het dier en melktanden en den aanleg der blijvende tanden bezit. »Deze aanleg nu," zegt de Hoogleeraar, »is niet, gelijk de vol»maakt gevormde tand, vast en hard ivoor, maar perkamentachtig buigzaam, »van binnen gevuld door eene zachte, ter voeding dienende bewerktuigde »stof, met een vaatrijk vlies en van genoegzamen omvang om eenen geweer»kogel of eenig ander vreemd ligchaam in zich te kunnen opnemen.

»Wordt nu in dat tijdsgewricht de kop van het dier door zulk een moord»tuig getroffen, wil daarbij het toeval, dat de nog in ontwikkeling verkee»rende tand dien kogel opvangt en tot zijn eigen weefsel doorlaat of daarin »opsluit, dan is de grond gelegd voor die meer of min uiteenwijkende ver»schijnselen, waaronder zich oliphantstanden, bij het bezit van ingevatte ko»gels, voordoen aan het oog."

Wij maakten in de tweede plaats gewag van exostosen, waarbij geene uit-

---

* *Odontography*, pag. 645.

† Aanmerkingen over het ontstaan van uitwassen in de slagtanden van Elephanten enz., in het *Tijdschrift voor de Wis- en Natuurk. Wetenschappen*, uitgegeven door de Eerste Klasse van het Koninkl. Nederl. Instituut. Eerste Deel.

wendige oorzaak, zoo het schijnt, gewerkt heeft. Uit oliphantstanden komen veelal slechts fragmenten van nieuwvormingen tot ons, waarbij het moeijelijk te beslissen valt, of men wezentlijk met het gevolg van een binnengedrongen vreemd ligchaam te doen heeft. Er zijn echter gevallen, waar de exostosen omschreven zijn en in welke bij het doorzagen niets voor den dag kwam, zooals in een praeparaat van het Leidsche Kabinet (N°. 1242 Br.) waarin, gelijk de katalogus vermeldt, een kogel vermoed werd; doch ten onregte, gelijk de doorsnede bewijst, die ik er van vervaardigde, Pl. I Fig. 1, 2. Nog duidelijker wordt ons echter de zaak, wanneer wij bedenken, dat bij sommige dieren, vermoedelijk zonder dat wij aan een pathologisch proces behoeven te gelooven, de holte voor de pulpa geregeld door eene osteodentine wordt opgevuld, zooals b. v. bij den grooten tand aan de benedenkaak van den cachelot, en de tanden van den walrus. Op het Leidsche Kabinet bevinden zich de hoektanden van de bovenkaak der Phoca proboscidea (N°. 1248, 1249 Br.), waarvan de holte in beide opgevuld is met eene prop van cement Pl. I Fig. 3, Pl. IV Fig. 1. Of dit laatste geval normaal of abnormaal is, durf ik niet beslissen; stellig echter heeft er geene uitwendige beleediging plaats gevonden. Eindelijk worden in het boven aangehaalde werk van Wedl * analoge uitgroeisels bij menschelijke tanden vermeld, die wel is waar kunnen beantwoorden aan carieuse holten, doch ook zonder uitwendig gebrek in den tand voorkomen. † De verdere constatering van dit feit zal dus wel overbodig zijn.

Overgaande tot den mikroskopischen bouw der exostosen, zal men niet van mij vergen, dat ik in bijzonderheden trede over elk der menigvuldige praeparaten, welke ik gelegenheid heb gehad te onderzoeken. Het zoude een tijdroovend en onnut werk zijn, dat althans in deze Vergadering niet op zijne plaats is. Ik meen integendeel dat het meer aan het doel van deze bijdrage zal beantwoorden, wanneer ik slechts eenige der meest karakterestieke nieuwvormigen bespreek en de overigen met stilzwijgen voorbij ga; naardien deze, hoogst ge-

---

* *Grundzüge der Pathol. Histologie*, S. 616 seqq.

† Nasmyth zegt hierover in zijne *Researches on the Developement, Structure and Diseases of the Teeth*, London 1849, pag. 78, ook met betrekking tot menschelijke tanden: „As it (the ossifica„tion of the pulpa) frequently takes place without any co-incident external decay, the only pos„sible relief is often withheld, as there are *no infallible diagnostic symptoms* warranting a deci„ded opinion."

ringe en van belang ontbloote wijzigingen uitgezonderd, met die welker beschrijving nu volgt en welke alle op oliphantstanden betrekking hebben, overeenkomen.

De eerste exostose Pl. II, Fig. 1, waarvan ik u den mikroskopischen bouw wil mededeelen, wordt in den catologus van het Museum Anatomicum vermeld onder N°. 1245 Br. Zij bestaat uit een aantal overlangs verloopende pijpvormige stijltjes, op welker oppervlakte hier en daar wratvormige knobbels voorkomen, welke zich zoodanig kunnen verlengen, dat ze op dergelijke knobbels van andere uitsteeksels toegroeijende, de verschillende stijltjes onder elkander vereenigen. De op deze wijze ontstane verbindingen verloopen gewoonlijk overdwars en zijn de oorzaak, dat de geheele exostose eene zamenhangende massa uitmaakt. Sommige stijltjes zijn als het ware uit de versmelting van twee of meerdere ontstaan, waardoor niet alle dezelfde overdwarsche afmetingen bezitten. Hoe de nieuwvorming met den oliphantstand heeft zamengehangen, is uit het praeparaat niet op te maken, daar hetzelve aan den vrij dikken steel, waardoor de verbinding hoogst waarschijnlijk heeft plaats gevonden, is afgezaagd en de tand zelf niet bewaard is gebleven. De mogelijkheid bestaat ook dat geen zamenhang hoegenaamd plaats heeft gevonden, maar dat de exostose vrij in de pulpa heeft gelegen.

Wat de wijze van ontstaan der stijltjes betreft, zoo leert ons het mikroskopisch onderzoek, dat er oorspronkelijk een of meerdere centrale vaatjes moeten hebben bestaan, waarom zich de ziekelijke stof heeft afgescheiden, terwijl later eene appositie van onregelmatige dentine uit de peripherische pulpa plaats heeft gevonden. Wij moeten dus onderscheiden in een centraal en peripherisch gedeelte der stijltjes, waaruit deze exostose is zamengesteld.

Duidelijk ziet men reeds bij eene zwakke vergrooting, Pl. IV, Fig. 2, in het midden der centrale stof een of meerdere vaatkanaaltjes, die zich veelal verlengen in andere, welke straalsgewijze verloopen; deze centrale stof bestaat uit subst. ostoïdea, welke naar het middelpunt zonder bepaalde grenzen in dentine overgaat; de buisjes dezer dentine verloopen straalsgewijze, terwijl deze in de omgevende dentine een zeer verward verloop bezitten, waarin geene bepaalde rigting is te ontdekken. Beide zelfstandigheden, de peripherische en centrale zijn veelal duidelijk afgescheiden, ofschoon het niet te ontkennen valt, dat enkele beenligchaampjes, voorkomende op de grens, met beide in verband staan; naar de peripherie ziet men ze overgaan in de buisjes der dentine, naar het centrum in de veelvuldige somtijds tot grootere ruimten versmoltene holten der ostoïdea.

Onder N°. 1246 Br. wordt in den katalogus eene nieuwvorming beschreven, die veel overeenkomst aanbiedt met de voorgaande; de stijltjes hebben echter grooter omvang en naderen meer tot elkander.

Ook hier schijnen wij een centraal en peripherisch gedeelte te moeten onderscheiden. Het centrale gedeelte is blijkbaar laagsgewijze afgezet; deze lagen, tusschen welke zich concentrische groepen van beenligchaampjes kunnen vertoonen, volgen echter onregelmatig op elkander en van juist in elkander passende kokers kan hier geen sprake zijn. In het middelpunt hoopen zich de beenligchaampjes zoodanig op, dat het praeparaat dien ten gevolge daar ter plaatse ondoorschijnend wordt. Duidelijk erkent men ook in dit geval de vaatkanaaltjes in het centrum Pl. IV, Fig. 3. In een der mikroskopische praeparaten, die ik onderzocht, strekte zich een derzelve zijdwaarts uit tot eene lengte van 0,36 m. m., de geringe bogt welke het beschreef niet mede gerekend. Het peripherische gedeelte bestaat uit s. ostoïdea, die verder naar buiten echter plaats maakt voor een weefsel, waarvan de grondzelfstandigheid, wel is waar veel overeenkomst aanbiedt met cement, doch dat toch doortrokken wordt met onregelmatige dentine buisjes die in alle rigtingen dooreenloopen. Aan het grensgedeelte neemt men eene tamelijk dikke laag beenligchaampjes waar, die het begin van de peripherische stof ten duidelijkste aantoonen.

In een derde geval (N°. 1234 Br.) waarin de exostose eene meer knobbelvormige gedaante bezit, ontmoeten wij wederom in de zamenstelling de dentine en subst. ostoïdea, gelijk in de beide overgaande praeparaten, doch beide anders gewijzigd. De peripherische dentine onderscheidt zich hier namelijk doordien tusschen hare buisjes, en met deze parallel, Haversche kanaaltjes voorkomen, welke eene overdwarsche afmeting hebben van 0,024—0,048 m. m. Pl. IV, Fig. 4. Zij doorkruisen het geheele veld en op die plaatsen, waar de dentine ophoudt om voor het cement te wijken, leggen zij zich tusschen groepen van deze laatste in. Dit cement, dat eenen bijzonderen rijkdom van beenligchaampjes vertoont, is of eenvoudig tusschen de dentine afgezet of laagsgewijze om menigvuldige centra afgescheiden. De hierdoor ontstane onvolkomene kokerstelsels, welke gelijk uit het bovenvermelde volgt van alle zijden door de uit de dentine afkomstige Haversche kanalen omgeven zijn, hebben op de doorsnede gewoonlijk eene zeer onregelmatige gedaante; sommige naderen tot den langwerpig elliptoïdischen, andere tot den cirkelvorm; nog andere smelten met nabijgelegene ineen, waardoor figu-

ren ontstaan, die in woorden moeijelijk zijn terug te geven. In enkele middelpunten neemt men openingen waar, die even als in echte beenzelfstandigheid voor dwars doorgesneden Haversche kanaaltjes te houden zijn.

Een der merkwaardigste preparaten van de geheele verzameling zieke tanden op ons kabinet is ontegenzeggelijk N°. 1233 Br. Pl. II, Fig. 2, 3. Het wijkt, zoowel in uitwendige gedaante als in mikroskopische structuur, af van de tot dus verre vermelde exostosen. Het is de wortel van eenen slagtand van eenen jongen oliphant, dwars afgezaagd; in de tandholte, zoowel als in de gezonde dentine, bevinden zich menigvuldige naaldvormige uitsteeksels, welke hier en daar met zandkorrel-groote knobbeltjes bedekt zijn, waardoor eenige overeenkomst ontstaat met stalactieten. In de holte, Pl. II, Fig. 2, steken deze naalden of stijltjes naar den wortel toe vrij uit, verder naar het ligchaam van den tand zijn zij omgeven door eene zelfstandigheid, die overeen schijnt te komen met dentine. De naalden, welke in het gezonde gedeelte van den tand voorkomen, worden insgelijks vrij, wanneer men hen naar den dunner wordenden wortel vervolgt. Duidelijk zijn de plaatsen aan de inwendige vlakte van den tand te bespeuren, waar zij zich in de gezonde dentine beginnen te verbergen; enkele stijltjes komen somtijds weder te voorschijn, om zich nogmaals in de tandzelfstandigheid aan het oog te onttrekken, of dan een deel uit te maken van de ziekelijke massa, welke in het ligchaam van den tand bijna de geheele holte inneemt. Op de dwarsche doorsnede, Pl. II, Fig. 3, zijn de stijltjes duidelijk van het omringende weefsel te onderscheiden, zoowel in de gezonde dentine als in het ziekelijke gedeelte, dat de holte opvult; zij doen zich voor als heldere doorschijnende ronde plekken, waarin somtijds een melkwit middelpunt te ontwaren is; bij enkele ziet men reeds met het bloote oog eenen concentrischen bouw, die, gelijk nader zal blijken, door het mikroskopische onderzoek bevestigd wordt. De witte dentine van de nieuwvorming hangt hier en daar met den tand zamen, op andere plaatsen bevinden zich spleten of duidelijke demarcatielijnen, die het gezonde van het ziekelijke gedeelte scheiden. Onder het mikroskoop zijn op overdwarsche doorsneden de naalden duidelijk te onderkennen van het omliggende weefsel; wij moeten dus ook hier wederom onderscheiden in eene centrale en peripherische stof; terwijl deze laatste de dentine onder velerlei wijziging vertoont, hebben de naalden eenen geheel eigenen bouw. Zij blijken te bestaan uit concentrische kokerstelsels, waarvan de lamellen of enkele kokers hier en daar eenigzins uitbuigen, doch overigens zeer regel-

matig op elkander volgen en in elkander passen, Pl. IV, Fig. 5, Pl. V, Fig. 1, 2. Op de doorsnede bezitten deze lamellen eenen donkeren en smalleren helderen zoom, en vertoonen veel overeenkomst met de kokerstelsels, welke zich in de Haversche kanaaltjes in de compacte beenzelfstandigheid bevinden. In hoe verre dezelve hier echter van afwijken zal uit de nadere beschrijving blijken.

De dwarsche afmeting der naalden verschilt van 0,180 m. m. tot 1,200 m. m. en meer. De dikte der lamellen bedraagt 0,0072 m. m. tot 0,0144 m. m.

Men kan de volgende wijzigingen in den bouw der kokerstelsels, die dus het karakteristieke der stijltjes uitmaken, en zich bij overdwars geslepen plaatjes natuurlijke als in elkander geplaatste ringen zullen voordoen, onderscheiden:

1° kunnen zij eenvoudig zijn, Pl. IV, Fig. 5, Pl. V, Fig. 1; behalve de concentrische ringen wordt weinig waargenomen, dat onze aandacht trekt. Alleen het middelpunt verdient eenigzins nader te worden onderzocht. Eene eigentlijke holte, die voor een vaatkanaal zoude gelden, treft men hier namelijk niet aan, gelijk men verwachten zoude; van den anderen kant is het echter opmerkelijk, dat de concentrische bouw, zoo duidelijk naar de peripherie nabij het middelpunt dikwerf minder goed is uitgedrukt of ontbreekt en er in plaats daarvan eene amorphe zelfstandigheid voorkomt, die moeijelijk nader te omschrijven is.

2° worden er kokerstelsels aangetroffen, die met dentine buisjes voorzien zijn, welke over het algemeen van het centrum naar de peripherie en dus straalsgewijze verloopen, Pl. V, Fig. 2; in sommige stijltjes der nieuwvorming zijn zij spaarzaam voorhanden en moeijelijk te vervolgen, daar er telkens, zoo het schijnt, ten gevolge van het afslijpen eene afbreking plaats vindt. Hier en daar is het echter duidelijk hoe ze in verband staan met de buisjes der omgevende dentine, en hunne natuur is dus niet te miskennen. In andere gevallen, vooral bij zeer uitgestrekte kokerstelsels zijn zij zeer talrijk, zoodat er een gemengd gebied ontstaat, waar dentine buisjes en lamellen elkander kruisen, Pl. V, Fig. 3. Ook gebeurt het, dat zij niet uitgaan van het middelpunt, maar uit de omgevende dentine afkomstig zijn *.

---

* NASMYTH (*Researches*, p. 79) beweert dat, wanneer de oorspronkelijk zelfstandige verbeeningen der pulpa in menschelijke tanden eene ziekelijke oorzaak hebben, deze bij voortgezetten groei wel tegen de binnenvlakte van die normale dentine kunnen worden aangedrukt, maar er nooit organisch

3°. In het centrum van sommige stijltjes bespeurt men eene geheel andere verhouding dan sub 1° werd vermeld. In plaats namenlijk van de amorphe stof, die als het ware het middelpunt sluit, treft men eenen onregelmatigen bij doorvallend licht zich zwart voordoenden klomp aan, die uit talrijke interglobulairruimten bestaat; eerst om deze deponeren zich nu de concentrische lamellen, Pl. V, Fig. 3. Bij deze wijziging gebeurt het dikwijls vooral in grootere kokerstelsels, dat men in of bij het middelpunt eene, Pl. V, Fig. 2, 3 of meer duidelijke vaatopeningen waarneemt. — Tandkogels en interglobulairruimten kan men ook in aanmerkelijke hoeveelheid ontwikkeld vinden op die plaatsen, waar twee kokerstelsels elkander aanraken, of de omgevende dentine met deze in contact komt. Van beenligchaampjes was nergens in de exostose eenig spoor te ontdekken.

4° moeten wij in het onderhavige preparaat eene omsluiting vermelden van twee of meerdere kokerstelsels door eene nieuwe opeenvolging van lagen, Pl. IV, Fig. 5. Wij kunnen haar met niets beter vergelijken dan met de omgeving van de lamellen, die de Haversche kanaaltjes in compacte beenzelfstandigheid omsluiten, door de over eene grootere uitgestrektheid gaande laminae. Men ziet bovendien hoe somtijds dergelijke omgevende kokerstelsels nogmaals door nieuwe gemeenschappelijke lagen omsloten worden, zoodat derhalve, om mij zoo uit te drukken, drie generaties op elkander kunnen volgen. Op overlangsche doorsneden der vrije stijltjes wordt het bevestigd, dat wij wezenlijk met kokerstelsels of in elkander sluitende cilinders te doen hebben; onder het mikroskoop zien wij, dat de lagen gerangschikt zijn om eene as, welke min of meer evenwijdig verloopt aan het stijltje, Pl. II, Fig 4. Vooral in dikkere stijltjes kunnen twee of meerdere dergelijke assen voorkomen, hetgeen bij zwakke vergrooting en zelfs met het bloote oog vooral in die modificatie gezien wordt, welke hierboven sub 3° vermeld werd. Hierbij kan het ook gebeuren, dat de as, welke bij opvallend licht als eene witte streep (ten gevolge der interglobulairruimten) gezien wordt, takjes afgeeft of zich splitst en in twee afzonderlijke, veelal kleinere stijltjes uitloopt.

---

mede verbonden worden. Zoo deze stelling eveneens waar is voor de oliphantstanden, dan zoude men hieruit tot de niet ziekelijke natuur der onderhavige exostose kunnen besluiten. Daar mij dit echter twijfelachtig voorkomt, geloof ik, dat Nasmyth's meening op dit geval niet toepasselijk is. Waar de buisjes van normaal ivoor de lamellen der kokerstelsels doorboren, zal men den organischen zamenhang toch wel niet willen ontkennen.

Bij deze overlangsche plaatjes kan men ook, beter dan bij overdwarsche, de structuur vervolgen van de zandkorrel-groote knobbeltjes, welke hierboven bij de algemeene beschrijving van het preparaat vermeld werden. Het blijkt hierbij, dat zij geen gedeelte uitmaken der eigenlijke kokerstelsels, maar bolvormige of ellipsoïdische ligchaampjes voorstellen, welke laagsgewijze om een middelpunt zijn afgezet, en hoewel zelfstandig, toch te zamen hangen met de oppervlakte der stijltjes; zeer dikwijls loopen ook de dentine buisjes van de kokerstelsels over in deze ligchaampjes. In sommige preparaten zie ik ook, dat deze bollen of ellipsoïden in de kokerstelsels als in een stroma gedeponeerd kunnen zijn, waardoor op de dwarsche doorsneden natuurlijk preparaten kunnen ontstaan, welke overeenkomen met de modificatie, welke wij hierboven sub 4° vermeld hebben. Het komt mij niet onwaarschijnlijk voor, dat in menschelijke tanden alleen deze zandkorrelvorm voorkomt, weshalve men daar minder juist van kokerstelsels kan spreken.

Wat de peripherische stof der naalden betreft, bijaldien er namelijk eene omsluiting der naalden plaats vindt, wat niet altijd het geval is, zoo kan men duidelijk aantoonen, dat deze in het gezonde gedeelte zoowel als in het ziekelijke, hetwelk de holte van den tand vult, uit zuivere dentine bestaat. In deze dentine houden de buisjes op de plaatsen, waarin tandnaalden steken, grootendeels op; gedeeltelijk echter en wel aan de randen der kokerstelsels buigen zij zich om, ten einde later hunnen weg te vervolgen, Pl. IV, Fig. 5. De dentine in de exostose hangt hier en daar naar de peripherie toe zamen met de gezonde tandmassa, voor het grootste deel echter ontwikkelt zij zich op vele plaatsen te gelijk uit middelpunten, vanwaar de tandbuisjes straalsgewijze uitloopen.

Een preparaat, dat eenigzins in bouw, doch niet in uiterlijk voorkomen met het zoo even beschrevene overeenkomt, is de exostose N°. 1242 Br., waarvan reeds vroeger met een enkel woord melding is gemaakt, Pl. I, Fig. 1, 2. Het stelt een dwars doorgezaagd kegelstuk voor, uit eenen oliphantsslagtand; aan de buitenvlakte vertoont zich eene ringvormige verhevenheid, waarvan naar binnen voor de grootste helft der peripherie eene verdieping, voor de andere kleinere helft eene knobbelvormige exostose beantwoordt. De nieuwvorming heeft eene langwerpig eivormige gedaante, waarvan de langste afmeting evenwijdig aan de tandholte loopt. De oppervlakte is over het algemeen genomen glad, hier en daar met verhevenheden voorzien; zij verschijnt dan als met zand bestrooid, of op die plaatsen, waar deze verhevenheden

grooter zijn, als met wratten bedekt. De basis, waardoor zij met de binnenvlakte van den tand vereenigd wordt, meet overlangs 5 Cm., overdwars 4 Cm. De lengte der exostose zelve is 9,5 Cm.; de overdwarsche afmetingen verschillen van 3—4,5 Cm.

Bij eene overlangsche doorzaging valt de ongelijke zamenstelling in het oog; gedeeltelijk blijkt de exostose te bestaan uit eene gele, meer doorschijnende stof, die zich voordoet als ronde of langwerpige plekjes, welke meestal eene witte kern bezitten, gedeeltelijk uit eene melkwitte zelfstandigheid, die als het ware het stroma voor de gele plekjes uitmaakt en deze dus van alle kanten omgeeft, Pl. I, Fig. 2. — Digt bij de basis vindt men eenen onregelmatigen gang, die naar den wortel van den tand in de holte uitkomt, en waarschijnlijk tot doorlating van bloedvaten uit de pulpa gediend heeft. Eene omstandigheid, die ik niet met stilzwijgen mag voorbijgaan, betreft de voortzetting van het weefsel der nieuwvorming tot in de gezonde dentine, welke laatste zich bij de doorsnede oogenblikkelijk door hare meerdere gelijkvormigheid onderscheidt. Op sommige plaatsen, vooral daar, waar zich de uitwendige verhevenheid bevindt, komt het ongelijkvormige weefsel der exostose tot digt bij de oppervlakte van den tand, ofschoon het deze niet bereikt. Dit doet mij vooronderstellen, dat de afzetting van de ziekelijke dentine reeds in een jeugdig tijdperk van het leven des diers moet hebben plaats gehad; althans eene structuur-verandering van de dentine in dien graad, waarvan het onderhavige preparaat een voorbeeld oplevert, is bij gebrek aan eene intensive stofwisseling moeijelijk denkbaar.

Uit het mikroskopisch onderzoek blijkt, dat het weefsel der exostose, gelijk reeds boven werd vermeld, eenige overeenkomst aanbiedt met N°. 1233 Br. De doorschijnende gele plekjes zijn zamengesteld uit concentrische kokerstelsels, die evenwel op verre na niet zoo duidelijk als in het even genoemde preparaat te voorschijn treden, zoodat hunne beteekenis zonder voorafgaande kennismaking met hetzelve moeijelijker te ontraadselen zou zijn geweest. De lagen zijn in den regel zwak geteekend; openingen in het middelpunt niet voorhanden. Het stroma bestaat uit dentine, dat hier en daar duidelijke Haversche kanalen en beenligchaampjes vertoont.

Eene omstandigheid, waardoor zich deze exostose, bij hare overeenkomst met de voorgaande, kenmerkend van deze onderscheidt, is het volkomen gemis aan tandkogels, en interglobulairruimten. In plaats hiervan zien wij de

beenligchaampjes optreden, die zoowel in het middelpunt der concentrische kokerstelsels als in de dentine van het stroma voorkomen.

De laatste nieuwvorming, welke ik onder uwe aandacht wil brengen, wordt vermeld onder N°. 1235 Br. Zij hangt nog met den tand zamen, doch is dwars afgezaagd, zoodat zij niet in haar geheel voorhanden is. De zeer onregelmatige oppervlakte onderscheidt zich van het dieper gelegene gedeelte door de mindere hardheid en door de gelijkenis op collageen, zoodat men met het mes fragmenten van dezelve kan afsnijden. Ik meen hieruit te mogen besluiten, dat de exostose bij het leven hare toekomstige grootte nog niet bereikt had, en dus in het tijdperk van groei begrepen was.

Het mikroskopische onderzoek van het preparaat is in zeker opzigt zeer belangrijk. De bouw komt in de hoofdzaak overeen met die, welke wij hebben opgemerkt bij N°. 1233 Br. Het merkwaardige betreft echter de tandkogels en interglobulairruimten, welke in deze exostose, vooral in een bepaald, doch met het bloote oog niet te onderscheiden gedeelte van het stroma of de peripherische stof in ongeloofelijke hoeveelheid voorkomen; bijzonder aan de oppervlakte zijn de tandkogels duidelijk omschreven waar te nemen. Op eene enkele zeer beperkte plaats doet zich de bouw dezer kogels anders voor, dan op het verreweg grootere gedeelte van de dwarsche doorsnede, waaruit ik mikroskopische plaatjes geslepen heb. In den regel ziet men namelijk de globuli als solide ligchamen, somtijds doortrokken met dentine-buisjes. Andere daarentegen, en het is op deze, dat ik vooral uwe aandacht meen te moeten vestigen, vertoonen zich als geïncrusteerde cellen, waaraan men plus minus 5 in elkander beslotene lagen kan onderscheiden, Pl. V, Fig. 4. Zij verkrijgen daardoor eenige overeenkomst met amylumbollen. Gemiddeld hebben deze tandkogels eene lengte van ongeveer 0,036 m. m. op eene breedte van 0,030 m. m., waaruit men ziet, dat hunne gedaante meer ellipsoïdisch dan bolvormig is. Zij laten zich echter moeijelijk naauwkeurig meten, naardien het beeld niet overal even duidelijk is, en evenmin altijd met zekerheid kan worden uitgemaakt, waar de buitenste lagen ophouden. Enkele dusdanige tandkogels schijnen met de uiteinden aan elkander vereenigd te zijn, zoodanig dat de lagen ook in elkander overgaan en daardoor onder het mikroskoop het aanzien verkrijgen van naast elkander gelegene, golfvormige en parallel verloopende lijnen, Pl. V, Fig. 5.

Voor dat wij uit de gegevene beschrijvingen eenige gevolgtrekkingen maken, komt het mij niet onbelangrijk voor, u met de onderzoekingen van vroegere schrijvers bekend te maken. Ik wil dit in korte trekken doen, vooral ten einde u te overtuigen, dat het onderwerp dezer bijdrage niet nieuw is, en ook om eenen beteren maatstaf ter vergelijking te erlangen.

Owen * spreekt in oliphantstanden van eene *osteodentine*, welke zich in meerdere of mindere hoeveelheid om een' kogel kan uitzweeten en die later met lagen van normaal ivoor wordt omgeven, dat digt bij de osteodentine het karakter van *vasodentine* aanneemt. In de kleine vrije spoelvormige knoopjes van deze osteodentine (waarschijnlijk onze stijltjes) zag Owen een of meerdere vaatkanaaltjes, omgeven door concentrische rokken der heldere grondzelfstandigheid en doorzaaid met beenligchaampjes, die in grootte overeenkomen met die uit het cement, maar rijker aan uitstralende beenkanaaltjes zijn. Ten slotte zij nog aangevoerd, dat Owen in de exostosen geene andere weefsels meent te moeten aannemen, dan die welke in de tanden van andere dieren en zelfs gedeeltelijk in die van den oliphant normaal voorkomen, namelijk de *vasodentine* en *osteodentine*.

Nasmyth † komt, voor zoover mij bekend is, de verdienste toe het eerst (A°. 1839) op ossificatien in de menschelijke pulpa opmerkzaam te hebben gemaakt. Volgens zijne meening gaat dit proces altijd vergezeld van pijn en eene bijzondere ongesteldheid (peculiar uneasiness) van de tand zelve, alsmede van de omliggende deelen.

Fransz Ulrich § heeft dezelve als losse zandkorrel-groote concrementen beschreven, welke ten getale van 1—5 in afgesletene of gecariëerde menschelijke tanden kunnen voorkomen. In den regel worden zij door de membrana pulpae bedekt en beantwoorden aan de kroon van den tand, zoodat zij bij het onderzoek van versche tanden aan de pulpa blijven zitten, wanneer men deze uit de holte neemt. Somtijds vergroeijen zij onder elkander of met den wand der tandholte; ook kunnen zij gelijktijdig met de zoogenaamde secundaire dentine voorkomen, waarover later met een woord zal gesproken worden, in welk geval zij door dentine-buisjes omgeven zijn. Ulrich heeft deze concrementen mikroskopisch onderzocht, en bevonden, dat zij uit concentrische lagen be-

---

* *Odontography*, p. 643, sqq.

† *Researches*, p. 77.

§ *Ueber feste Neubildungen in der Zahnhöhle. Zeitschr. der Gesellsch. d. Aertze zu Wien.* 1852. S. 128 sqq.

stonden, die holle ruimten tusschen zich innemen en onder verschillende hoeken door kanaaltjes gesneden worden. Uit zijne beschrijving en bijgevoegde teekeningen is gemakkelijk op te maken, dat wij hier met analoge vormen te doen hebben, als in sommige exostosen van den oliphantstand (vooral N°. 1233 Br.) voorkomen. Ulrich noemt deze concrementen *osteoïden* en meent uit een tweetal ziektegeschiedenissen te kunnen besluiten, even als Nasmyth reeds voor hem had opgemerkt, dat hare afzetting in de pulpa met pijn gepaard gaat.

Ook Carl Wedl * heeft op eene naauwkeurige wijze eenige nieuwvormingen uit menschelijke tanden beschreven; wat het uiterlijke voorkomen betreft, verschillen zij echter in zooverre van de concrementen van Ulrich, als zij alle met den wand der tandholte vergroeid zijn. Ontegenzeggelijk hebben beide evenwel denzelfden oorsprong. Wedl rangschikt de stof, waaruit zij bestaan, onder de *osteodentine* van Owen, terwijl zich om deze heen eene dentine afzet, die rijk aan tandkogels is. In enkele gevallen heeft ook de schrijver der *Grundzüge* ontegenstrijdig vormen gezien, die met de onze eene groote overeenkomst aantoonen. In een preparaat, waarvan in Fig. 142 van zijn werk eene afbeelding gegeven wordt, bevonden zich in het centrum der osteodentine talrijke globulair-massa's, van waaruit dentine-buisjes naar de peripherie uitstraalden, terwijl aan den rand de afzetting in lagen duidelijk werd waargenomen.

Beschouwen wij de exostosen der tanden onder een algemeen gezigtspunt, zoo geloof ik het volgende uit mijne onderzoekingen te mogen vaststellen.

1°. De stoffen waaruit deze nieuwvormingen bestaan, zijn in den regel tweeledig: *centraal* en *peripherisch*, die gewoonlijk duidelijk van elkander te onderscheiden zijn.

2°. De centrale zelfstandigheid (osteodentine Owen) is in haren eenvoudigsten vorm laagsgewijze om een centrum afgezet, zonder dat men meer daarin kan onderscheiden; als wijziging van dezen typus kan het gebeuren: *a*) dat zich in het centrum een of meerdere Haversche kanalen bevinden, *b*) dat in dit centrum tandkogels met interglobulairruimten ontwikkeld zijn, *c*) dat in de rigting van het middelpunt naar den omtrek dentine-buisjes voorkomen, ofschoon deze ook uit de omgevende dentine afkomstig kunnen zijn, en ten

---

* *Grundzüge*. S. 616 seqq.

laatste *d*) dat zich, in plaats van tandkogels, beenligchaampjes vertoonen, die in het middelpunt of tusschen de lagen afgezet zijn.

3°. De peripherische stof der exostosen, die somtijds kan ontbreken, bestaat zelden uit cement, gewoonlijk uit dentine, welke laatste zich of om Haversche kanalen ontwikkelt, of afgeleid kan worden uit het normale tandweefsel; somtijds verloopen er in Haversche kanalen, paralel met de dentinebuisjes.

4°. Wanneer interglobulair-ruimten of beenligchaampjes in aanmerkelijke hoeveelheid in eene nieuwvorming ontwikkeld voorkomen, zullen zij, behalve in de middelpunten, vooral gevonden worden op die plaatsen, waar de centrale en peripherische stof elkander raken.

5°. Interglobulair-ruimten en beenligchaampjes schijnen niet te gelijkertijd voor te komen; er zijn althans stellig gevallen, waarin zij elkander geheel uitsluiten.

Met een enkel woord zal ik nog melding maken van de wijze, waarop vermoedelijk de exostosen der tanden ontstaan. Uit onze onderzoekingen is gebleken, dat in de centrale stof openingen kunnen voorkomen, die men als dwars doorgesneden vaatkanaaltjes te beschouwen heeft; in andere gevallen ontbreken zij, en ontdekt men dat de lagen zich ontwikkeld hebben om een gesloten middelpunt. Het schijnt dat Owen slechts de eerste, Ulrich en Wedl de tweede soort van centrale stof hebben waargenomen. Opmerkelijk is het, dat schijnbaar hetzelfde weefsel in het eerste geval onder den invloed van bloedvaten wordt afgescheiden, in het andere zonder dien invloed tot stand kan komen. Mij dunkt, dit laatste laat zich op tweederlei wijze verklaren: het is mogelijk, dat in het middelpunt van de kokerstelsels der centrale stof primitief een of meerdere bloedvaten voorhanden waren, die tot afzondering der concentrische lagen gediend hebben en later geabsorbeerd zijn, waarna het centrale kanaal zich met eene amorphe stof gevuld heeft. Volgens eene andere meer waarschijnlijke verklaring zoude men moeten aannemen, dat er tot afzetting van de lagen in de centrale stof direct geene bloedvaten waren benoodigd, maar dat de door de pulpa afgezonderde tandkogels zich tot eene osteodentine of osteoïde, zoo men een dezer namen wil bezigen, hebben omgezet. Dit wordt eenigermate waarschijnlijk door het gelijktijdig voorkomen van tandkogels in het centrum der kokerstelsels, alsmede door de waarneming, dat deze tandkogels door een incrustatie-proces en versmelting

in paralelle lagen kunnen overgaan. Bepaaldelijk wordt hier gedoeld op het preparaat N°. 1235 Br., waarbij althans stellig kan worden aangenomen, dat de op deze wijze ontstane lagen met de dentine-buisjes niets gemeen hebben. Cf. Pl. V, Fig. 4 en 5.

Het behoeft wel geen betoog, dat deze tweede wijze van ontstaan alleen mogelijk kan zijn in die gevallen, waarin men de tandkogels of interglobulair-ruimten als constituerende elementen in de centrale stof der exostosen ziet treden; waar daarentegen beenligchaampjes voorhanden zijn, laat zich de formatie op deze wijze niet verklaren; trouwens, bij aanwezigheid van beenligchaampjes ontbreken ook de vaatkanalen niet, en kan de afzetting der concentrische lagen als eene gewone uitzweeting uit de bloedmassa worden beschouwd.

Wat de formatie der peripherische stof betreft, zoo geschiedt deze onder den invloed der pulpa, op gelijke wijze als de normale dentine, en behoeven wij hierbij dus niet opzettelijk stil te staan.

II. OVER GENEZING VAN TANDBREUKEN.

In het tweede gedeelte dezer bijdrage heb ik mij voorgesteld de genezing van tandbreuken te behandelen, waarbij vooral de vraag zal moeten beantwoord worden, door behulp van welk weefsel eene dusdanige genezing tot stand kan komen.

De geschiedenis is arm aan voorbeelden, waarin tanden afgebroken en de fragmenten later weder aan elkander gegroeid zijn. De weinige gevallen, die hierop betrekking hebben en mij bekend zijn geworden, kan ik u kortelijk mededeelen. HYRTL * vermeldt eenen snijtand, die in het Anatomisch Museum te Breslau wordt bewaard, en waarbij hij de volgende geschiedenis voegt: »*Einem Studenten wurde auf dem Turnplatz mit einem Rappier ein Schnei-* »*dezahn in der Wurzel abgebrochen. Das Fragment hing noch am Zahn-* »*fleisch und wurde durch den anwesenden Chirurgen in das Zahnfach* »*gedrückt. Es wuchs wieder fest, aber mit seinem Festwerden stellten sich* »*so anhaltende und heftige Schmerzen ein, dass später die Entfernung des* »*Zahnes nothwendig wurde. Der ausgezogene Zahn zeigte eine geringe seit-* »*liche Verschiebung seiner consolidirten Fragmenten und die damit verbundene*

* *Handbuch der Topogr. Anat.* 2 Aufl. Band I, S. 239.

»Winkelbiegung der Nerven, so wie seine Compression durch den ringförmigen »Callus erklärte hinlänglich die Entstehung der Odontalgie." Ongelukkig wordt in dit geval geene melding gemaakt van eenig mikroskopisch onderzoek.

Valentin * spreekt van twee kiezen van het paard, die op het Berner Museum voorhanden moeten zijn, en waarin zich spleten bevonden, die waarschijnlijk door eene voorafgaande verwonding ontstaan waren; zooals de onderzoeking van geslepen plaatjes leerde, had er genezing plaats gevonden door echte beenzelfstandigheid.

Eene uitvoerige beschrijving van de genezing eener tandbreuk vinden wij bij Ficinus †, in een opstel *über das Ausfallen der Zähne.* Zij betreft namelijk eenen bovensnijtand van het paard, in bezit van Prof. Bink te Dresden. Hij was aan den wortel overtrokken met eene dikke cementlaag, en op de doorsnede bespeurde men de sporen eener breuk, getuige eene spleet, welke dwars door het midden van den wortel en het kanaal der pulpa verliep. De spleet had gemiddeld bijna eene halve lijn wijdte, was echter met nieuwe vaste massa opgevuld, die zich deed kennen als cement, waarvan de paralelle lagen aan de oppervlakte van den tand ter wederzijde in de spleet binnendrongen. Men herkende duidelijk het voor en na de fractuur afgezette cement daaraan, dat de in de spleet binnendringende lagen buiten de primitief voorhandene gelegen waren. De pulpa was van dezelfde massa omgeven en dus buiten aanraking gesteld met de oorspronkelijke wanden van het kanaal.

Ook Owen deelt in zijne Odontography § een merkwaardig geval mede van eenen ondersten slagtand van den Hippopotamus, die compleet gebroken en later door eenen callus van osteodentine weder genezen was. De holte van den tand werd op de plaats der breuk geoblitereerd door eene nieuwvorming, die uit dezelfde stof bestond.

Op het Anatomische Kabinet onzer Hoogeschool is insgelijks een preparaat aanwezig, waaruit duidelijk de genezing van gebroken tandmassa kan worden bewezen. De elementen van den callus zijn hier gedeeltelijk van eene andere natuur dan in de boven aangehaalde gevallen, zoodat ik het niet ondienstig heb geacht, u de beschrijving daarvan mede te deelen.

---

* *Handwörterbuch der Physiologie*, Band I, S. 731.

† *Journal f. Chirurgie u. Augenheilkunde von* v. Walther *u.* Ammon, Band VI, Heft 1, S. 14.

§ Pag. 569, Pl. 142, fig. 1, 2.

Het preparaat, dat ik bedoel, wordt vermeld onder N°. 210 Bonn., en stelt een stuk voor uit een oliphants-slagtand. Pl. III, fig. 1. De uitwendige schors van den tand schijnt te zijn weggenomen, en in de dus ontbloote dentine bespeurt men eene sphaerische roestkleurige holte, waarin vroeger een geweerkogel gezeten heeft. Beantwoordende aan de holte van den kogel, neemt men aan de binnenvlakte des tands een knobbelvormig uitgroeisel waar, dat in de tandholte uitsteekt. De basis van deze exostose bedraagt in de langste afmeting 37 m. m., in de kortste 16 m. m., terwijl zij eene hoogte heeft van 25 m. m. De holte van den kogel staat nog duidelijk in verband met eenen onregelmatigen gang, die in de overlangsche rigting van den tand (waarschijnlijk naar den wortel toe) te vervolgen is en in de tandholte uitmondt; digt bij de kogelholte is hij naauw, aan zijn andere uiteinde wordt hij eensklaps wijder. Wij kunnen denzelven wel niet anders dan als een kanaal beschouwen, waardoor de bloedvaten der pulpa in de nieuwvorming zijn binnengedrongen.

Uit het preparaat werden mikroskopische plaatjes vervaardigd in de overlangsche rigting van den tand en perpendiculair op de kogelholte. Pl. III, fig. 2. Het onderzoek van deze plaatjes leverde het volgende op. Bij zwakke vergrooting bemerkt men zeer duidelijk fragmenten van gezonde dentine, die allerlei gedaanten bezitten en ook in afmeting weinig met elkander overeenkomen. Deze fragmenten, die door de geheele exostose voorkomen en ten gevolge van de vermorseling van den tand door den kogel ontstaan zijn, worden elk voor zich omgeven door substantia ostoïdea, welke begrensd wordt door eene ziekelijke dentine met Haversche kanalen. Opmerkelijk is het, dat de naaste omgeving der fragmenten zuiver cement is met talrijke beenligchaampjes, doch meestal zonder aanduiding van dentine-buisjes. De Haversche kanalen bevinden zich bij voorkeur in het midden der met callus gevulde tusschenruimten, welke de fragmenten normale dentine van elkander scheiden. Om deze Haversche kanalen ontwikkelen zich nu onregelmatige dentine-buisjes, zoodat hier het karakter van vasodentine niet te miskennen is. Aan de binnenvlakte der exostose, die dus naar de tandholte is toegekeerd, heeft de dentine een geheel normaal voorkomen.

Wij hebben hier dus een voorbeeld, hoe beleedigingen van den tand, die met verkleining der zelfstandigheid gepaard gaan, genezen. Even als bij beenbreuken moet hier de formatie van eenen callus aangenomen worden, die de gebroken of vermorselde stukken aan elkander hecht; een callus die

aanvankelijk week zal zijn, doch later harder wordt, en onder den invloed van de bloedvaten der pulpa, wel is waar om de fragmenten heen het karakter van waar cement, doch verder naar den omtrek dat van vasodentine en eindelijk van normale dentine aanneemt.

III. OVER REGENERATIE DER TANDWEEFSELS.

Overgaande tot het derde punt mijner bijdrage, namelijk de regeneratie van de tandweefsels, wil ik de woekering van het cement, om vroeger vermelde reden onaangeroerd laten, en mij uitsluitend bepalen tot de vraag, in hoeverre het email en de dentine, bij verlies, vatbaar zijn voor eene regeneratie. Zoo ik hier van regeneratie spreek, dan bedoel ik hiermede bepaaldelijk de nieuwvorming van een weefsel, analoog aan het door een uitwendig geweld verlorene, en wel op de plaats der beleediging zelve.

Wedl * beschrijft aan eene menschelijke kies eene emailmassa, welke op eenen millimeter afstand onder het normale email voorkwam, daarvan door echte dentine gescheiden was en naar buiten aan eene speldekop groote verdieping van de kroon beantwoordde. In hoeverre hier echter van eene nieuwvorming sprake kan zijn, zooals de schrijver wil, waag ik niet te beslissen. Men moet hier aannemen, dat de pulpa eene voedingstof kan uitzweeten, die tot email-prisma's wordt omgezet, eene stelling die door geen ander analoog feit wordt ondersteund. Het komt mij waarschijnlijker voor, dat wij hier met een aangeboren gebrek te doen hebben, mogelijk teweeg gebragt door eene beleediging van den tand, terwijl deze nog in het tandzakje besloten lag, en vallende in een tijdperk, dat het *organon substantiae adamantinae* nog in wezen was, en voor de vorming van email, al was dit dan ook op eene tegennatuurlijke plaats, kon gebezigd worden. Zoodra de tand eenmaal te voorschijn getreden is, houd ik het ontstaan van email voor minder waarschijnlijk, en kan er dus van eene regeneratie na verlies evenmin sprake zijn.

Anders is het gelegen met de dentine, naardien de bron, waaruit dit bestanddeel van den tand zich opbouwt, blijft bestaan. Uit de onderzoekingen van Tomes † weten wij, dat zich vooral in tanden van oude lieden, waarvan

---

* *Grundzüge*, S. 622.

† J. Tomes, *A course of Lectures on dental Phys. und Surgery*. London, 1848, p. 50.

de kroonen zijn gesleten, eene zoogenaamde secundaire dentine door ossificatie der pulpa kan formeren, die zich door de aanwezigheid van vaatkanalen onderscheidt en aanleiding kan geven tot vernaauwing of zelfs geheele obliteratie der tandholte. SALTER * heeft dit onderwerp, door welks behandeling zich JOHN HUNTER † zich reeds verdienstelijk maakte, tot een bepaald punt van onderzoek gekozen, en waargenomen, dat deze dentine, welke hij, mijns inziens, zeer juist *dentine of repair* noemt, ook in die gevallen ontstaat, waarbij een gedeelte van het email door uitwendige beleediging was afgebrokkeld en de normale dentine bloot kwam te liggen. Voor zoo verre ik kan nagaan, vond hij echter geene vaatkanaaltjes daarin, gelijk TOMES. Ook ULRICH § vermeldt eene dusdanige appositie van nieuwe tandstof, door hem met den naam van *dentinoïd* bestempeld. Met het oog op deze verschillende waarnemingen, van welker juistheid men zich met betrekking tot afgesleten tanden door eigen onderzoek gemakkelijk kan overtuigen, blijft dus eene regeneratie van dentine bij den mensch, na verlies der kroon, in die mate, dat de pulpa niet meer beschut wordt, onder de mogelijkheden, ofschoon mij geene gevallen bekend zijn, waarin zij werkelijk tot stand is gekomen.

Bij dieren daarentegen met holle tanden, waar voortdurend nieuwe dentine wordt afgezet tegen de oudere lagen aan en de tand blijft groeijen, wordt deze mogelijkheid tot een feit. Ik geloof dit door de volgende waarneming te kunnen bewijzen. Zij heeft betrekking op eenen slagtand van het Nylpaard (N°. 1252 Br.), die in vroegeren leeftijd van het dier op eene zeer onregelmatige wijze is afgebroken. Pl. III, Fig. 3. Men onderscheidt uiterlijk daaraan een met email overdekt gedeelte, dat aan de voorvlakte eene veel grootere uitgestrektheid beslaat dan naar achteren, waar het zeer ver naar den wortel toe inspringt. Dit gedeelte, dat primitief na de breuk voorhanden is geweest, wordt naar de snijvlakte van den tand door eene onregelmatige gekartelde lijn van eene massa afgescheiden, die knobbelvormig boven den breukrand uitsteekt en zich door gemis van email duidelijk onderscheidt. Wij hebben het volste regt deze laatste zelfstandigheid voor eene nieuwvorming te houden, welke na de breuk door de pulpa is uitgezweet. De tandholte

---

* S. JAMES A. SALTER, *on Dentine of repair in Guy's Hospital Reports.* Vol. VIII, part II, p. 345.

† *Hist. Nat. Dent. Hum.* Hagae 1780, pag. 164. *Idem, On the Teeth.* 1771, pag. 108.

§ *Loc. cit.* S. 141.

wordt evenwel hierdoor niet afgesloten, zoodat het vrije deel van den tand eene opening overlaat waarin men den pink kan steken. Bij eene overlangsche doorsnede van den tand blijkt de wand der holte, die wel is waar voor het grootste deel glad is, hier en daar met uitpuilende knobbelvormige verhevenheden, op andere plaatsen, vooral naar den wortel toe, met verdiepingen bezet te zijn. Pl. III, Fig. 4. In de dentine laten zich met het bloote oog twee lagen onderscheiden: eene naar buiten, eene andere naar binnen; de eerste is overdekt met het email en moet zijn afgezonderd voor dat de breuk plaats vond; de tweede, welke de naar boven en beneden opene tandholte begrenst, steekt boven het niveau van den breukrand uit en bedekt dezen kapvormig. De lijn, welke beide lagen van elkander scheidt, is zwak aangeduid, doch onmiskenbaar. Zij toont aan, dat in het langste gedeelte de tand onmiddellijk na de breuk eene lengte had van 8½ Cm., welke na de plaats gehad hebbende groei en regeneratie tot 12½ Cm. geklommen is. Er heeft dus eene vermeerdering van massa plaats gevonden ter lengte van 4 Cm., waarvan 8 m. m. komen op de nieuwgevormde of geregenereerde dentine en het overige op den wortel.



VERKLARING DER PLATEN.

PLAAT I.

Fig. 1. Stuk van eenen opengezaagden oliphants-slagtand, waarin eene exostose, welke met den wand der tandholte vergroeid is. Dit preparaat wordt vermeld in den Catalogus van het Kabinet *, onder N°. 1242 Br.

Fig. 2. Hetzelfde stuk overlangs doorgezaagd, ten einde het ongelijkvormige der exostose en haren zamenhang met de dentine van den tand te doen uitkomen. De onregelmatige gang, waarin zich hoogstwaarschijnlijk bloedvaten uit de pulpa hebben voortgezet, is op twee plaatsen schuins doorgezaagd en aan de basis der exostose zigtbaar.

Fig. 3. Overlangs doorgezaagde en gepolijste slagtand van de Phoca proboscidea (N°. 1248 en 49 Br.), waarvan de holte is opgevuld met eene prop van cement. Dit cement wordt op Pl. IV, Fig. 1 mikroskopisch afgebeeld.

PLAAT II.

Fig. 1. Ziekelijke nieuwvorming uit eenen oliphants-slagtand, hoogstwaarschijnlijk aan den steel van zamenhang met den tand doorgezaagd. N°. 1245 Br. Zie over den fijneren bouw, Pl. IV, Fig. 2.

Fig. 2. Wortel van eenen oliphants-slagtand, dwars afgezaagd en opengebroken, zoodat de exostose, welke zich in de holte bevindt, duidelijk te voorschijn treedt. N°. 1233 Br. Men ziet de stijltjes, waaruit de nieuwvorming bestaat, hier en daar bedekt met zandkorrelgroote knobbeltjes, en naar het worteleinde dunner worden. De stijltjes vloeijen op sommige plaatsen in elkander, waardoor hun omvang niet weinig vermeerderd wordt; op andere plaatsen ziet men ze uit de dentine van het jeugdige gedeelte van den tand te voorschijn treden.

---

* Deze Catalogus is uitgegeven in folio, onder den titel van: *Museum Anatomicum Lugduno-Batavum*, door de Hoogleeraren Ed. en Ger. Sandifort. Br. beteekent *Collectio Brugmansiana* Bonn. *Collectio Bonniana*.

Het ronde gat en de hoekige inham in het bovenste gedeelte der teekening waren in het preparaat voorhanden en zijn, ofschoon kunstmatig voortgebragt, door den teekenaar in de afbeelding teruggegeven.

Fig. 3. Hetzelfde preparaat op de overdwarsche doorsnede, zoo als het zich voordeed, voor dat de tand ten behoeve van de voorgaande teekening was opengebroken. Links vertoont zich eene scheur in de schors, beantwoordende aan de linker breukvlakte in de vorige figuur. De nieuwvorming vult de holte niet geheel op; over een groote uitgestrektheid hangt zij echter met den tand zamen. De stijltjes, kenbaar aan de kringen, bevinden zich niet alleen in de eigentlijke exostose, maar zijn ook in de normale dentine voorhanden. Het is duidelijk dat, behalve de stijltjes, ook eene omhullende (peripherische) stof in de exostose aanwezig is, die, bij mikroskopisch onderzoek, uit dentine blijkt te bestaan.

Fig. 4. Overlangs geslepen en in vernis bewaard plaatje, uit twee met elkander vergroeide stijltjes van hetzelfde preparaat vervaardigd, bij eene 2½ malige vergrooting en met opvallend licht geteekend. In beide stijltjes ziet men eene centrale as, die zich bij deze wijze van verlichting wit voordoet, het noodzakelijke gevolg van hare zamenstelling uit tandkogels en met lucht gevulde interglobulair-ruimten. De van deze as, in het dikkere stijltje, uitstralende takken zijn van dezelfde natuur. Aan de oppervlakte ziet men de zandkorrelgroote knobbeltjes in zamenhang met het stijltje. Zie verder over den mikroskopischen bouw van N°. 1233 Br. Pl. IV, Fig. 5. Pl. V, Fig. 1, 2, 3.

PLAAT III.

Fig. 1. Stuk van eenen oliphants-slagtand (N°. 210 Bonn.) met een tepelvormig uitsteeksel aan de binnenvlakte, overlangs doorgezaagd. Tegenover de punt des tepels wordt eene sphaerische roestkleurige holte gezien, welke tot verblijf heeft gediend van eenen geweerkogel. Aan de zijde, waar dit vreemde ligchaam is binnengedrongen, ontbreekt een groot gedeelte van het normale tandweefsel, dat eene bladerige natuur had aangenomen en dus gemakkelijk verwijderd werd. De zamenstelling van het uitsteeksel wordt duidelijk uit:

Fig. 2. Verbeeldende een dun geslepen plaatje, uit het naar boven gekeerde gedeelte van Fig. 1. Het werd met Canada-balsem behandeld en bij

2 malige vergrooting met opvallend licht geteekend. Tot beter verstand van den lezer diene nog, dat in het Zuid-Oosten een gedeelte der kogelholte op de doorsnede zigtbaar is.

De fragmenten dentine, welke door de vermorseling van den tand door den kogel ontstaan, en aan de in den regel scherp begrensde randen duidelijk kenbaar zijn, worden door eenen callus van cement omgeven. De verbinding van deze fragmenten met den callus was niet overal zeer innig, zoodat het betrekkelijk vrij groote mikroskopische preparaat bij de behandeling gemakkelijk uiteen viel, hetgeen trouwens in de aan de natuur getrouwe teekening zeer goed zigtbaar is.

Fig. 3. Slagtand van het Nylpaard, in vroegeren leeftijd van het dier, op eene zeer onregelmatige wijze afgebroken, van achteren gezien. Boven uit de holte van den tand steekt de nieuwgevormde massa uit, welke den breukrand bedekt en aan de meer gladde oppervlakte, die echter hier en daar met verdiepingen en knobbels bedekt is, gemakkelijk wordt herkend. N°. 1252 Br.

Fig. 4. Boven-benedenwaartsche en voor-achterwaartsche doorsnede van den vorigen tand. Er is eene duidelijke demarcatie-lijn, vooral in het voorste gedeelte, aanwezig, welke aangeeft wat voor- wat na de plaats gehad hebbende breuk, aan tandstof is afgescheiden. De later afgezonderde dentine bedekt gedeeltelijk den breukrand kapvormig, zoodat er eene wezentlijke regeneratie aan het afgebroken gedeelte heeft plaats gevonden.

MIKROSKOPISCHE AFBEELDINGEN.

PLAAT IV.

Met uitzondering van Pl. IV, Fig. 1, hebben de afbeeldingen van Pl. IV en V betrekking op nieuwvormingen uit oliphantstanden. De vergrooting is bij de figuren uitgedrukt.

Fig. 1. Mikroskopische teekening van een overlangs geslepen plaatje van het cement uit den tand van Phoca proboscidea, afgebeeld in Pl. I, Fig. 3. N°. 1248 en 49 Br. In het Westen ziet men een paar Haversche kanaaltjes, welke zich van den vrijen rand der cementprop in de zelfstandigheid begeven. Het bovenste verdeelt zich in drie kleinere kanaaltjes, welke

nog een eind wegs vervolgd konden worden. Het preparaat is buitengemeen rijk aan beenligchaampjes.

Fig. 2. Overdwars geslepen plaatje van een der stijltjes uit de exostose N°. 1245 Br. Verg. Pl. II, Fig. 1. Men ziet vooral in dit preparaat eene duidelijke begrenzing tusschen peripherische en centrale stof. Eerstgenoemde is zamengesteld uit dentine met door elkander verloopende dentine-buisjes. De centrale stof bestaat uit substantia osteoïdea, welke naar het middelpunt toe straalsgewijs verloopende Haversche kanalen en dentinebuisjes vertoont.

Fig. 3. Overdwarsche coupe uit eene stalactietvormige exostose, N°. 1246 Br. Het centrale gedeelte van het stijltje, waaruit dit preparaat werd vervaardigd, overziet men geheel; de afzetting in lagen is hier zeer onregelmatig geschied; in het middelpunt hebben zich de beenligchaampjes zoodanig opeengehoopt, dat het hierdoor geheel ondoorschijnend werd; men ziet uit dit middelpunt duidelijk een Haversch kanaaltje ontstaan, dat zich in eene bogt noordwaarts begeeft. Van de peripherische stof, die vooral op de grens rijk aan ligchaampjes is, bespeurt men in de teekening slechts een gedeelte. Zoowel de centrale als peripherische zelfstandigheid bestonden in dit geval uit cement, dat slechts aan de vrije oppervlakte van het stijltje doortrokken werd met onregelmatig verloopende dentine-buisjes.

Fig. 4. Peripherische dentine uit eene knobbelvormige exostose, N°. 1234 Br. Evenwijdig aan de dentine-buisjes verloopen in dit geval Haversche kanaaltjes, welke in het preparaat schuins zijn doorgeslepen. Het is deze wijziging der tandstof, waaraan Owen den naam van vasodentine gegeven heeft.

Fig. 5. Gedeelte van eene overdwarsche doorsnede van een der stijltjes uit de exostose N°. 1233 Br. Zie Pl. II, Fig. 2, 3, 4. De centrale stof bestaat uit regelmatig op elkander volgende kokerstelsels en wordt omgeven door eene dentine (peripherische stof), waarin de buisjes zich of om de kokerstelsels heen buigen of aan den rand der centrale stof eindigen. In het noordelijke gedeelte van het preparaat ziet men, hoe twee op zichzelve staande kokerstelsels omgeven kunnen worden door gemeenschappelijke lagen en hoe de daardoor ontstaande zamengestelde kokerstelsels nogmaals met dergelijke in een nieuw stelsel van lagen kunnen worden opgesloten.

PLAAT V.

Fig. 1. Gedeelte van hetzelfde preparaat als op Pl. IV, Fig. 5 werd afgebeeld, doch sterker vergroot, ten einde duidelijker te doen uitkomen, hoe de buisjes der peripherische dentine aan den rand der kokerstelsels kunnen eindigen. Deze buisjes vertakken zich en loopen zelfs in de centrale stof over.

Fig. 2. Centrale stof van een ander stijltje uit dezelfde exostose, opmerkelijk om het Haversche kanaal, dat in het middelpunt voorkomt, om de van daaruit straalsgewijs verloopende dentine-buisjes, alsmede om de menigvuldige interglobulair-ruimten, welke tusschen de kokerstelsels voorkomen en in de afbeeldiug in het Z.W. zigtbaar zijn.

Fig. 3. Andere wijziging der centrale stof van een stijltje uit dezelfde exostose. De ringen, welke de kokerstelsels uitdrukken, zijn uiterst zwak begrensd; daarentegen komen de dentine-buisjes, welke eenigzins slingerend en straalsgewijs van uit het centrum verloopen, hier en daar zeer duidelijk te voorschijn. Talrijke interglobulair-ruimten vertoonen zich om en bij het middelpunt, dat door een Haversch kanaal wordt ingenomen.

Fig. 4. Tandkogels uit eene knobbelvormige exostose (N°. 1235 Br.) merkwaardig om het incrustatie-proces, dat daarin wordt waargenomen.

Fig. 5. Ander gedeelte van hetzelfde preparaat. De tandkogels schijnen met de uiteinden aan elkander vereenigd te zijn, zoodanig, dat de lagen ook in elkander overgaan, en daardoor onder het mikroskoop het aanzien verkrijgen van naast elkander gelegene, golfvormige en evenwijdig verloopende lijnen,





Fig. 1.



Fig. 3.



Fig. 2.

Lith. v. Meijer & Cie Amst.

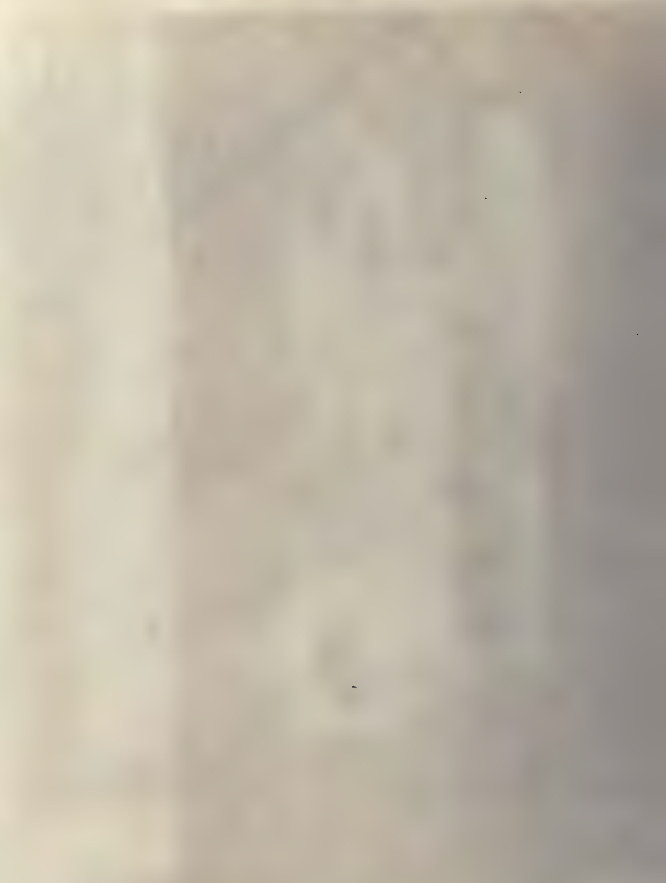







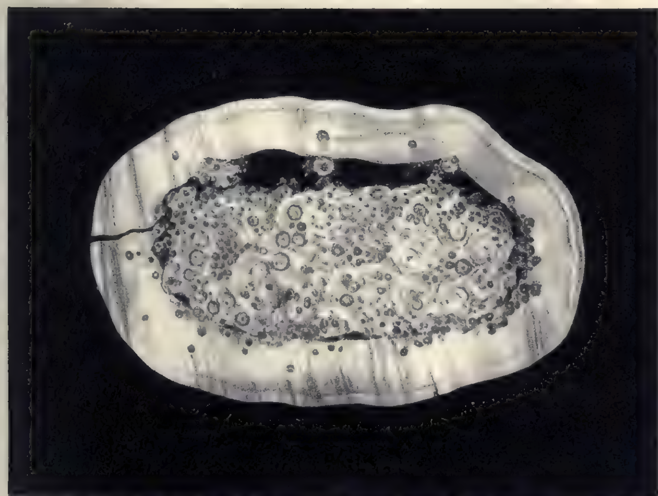
Fig. 1.

Fig. 2.



Fig. 4.

Fig. 3.





H. M. Adriaans en T. Hooiberg ad nat. del.

Lith. v. Meijer & C° Amst.

A. J Wendel in lap del







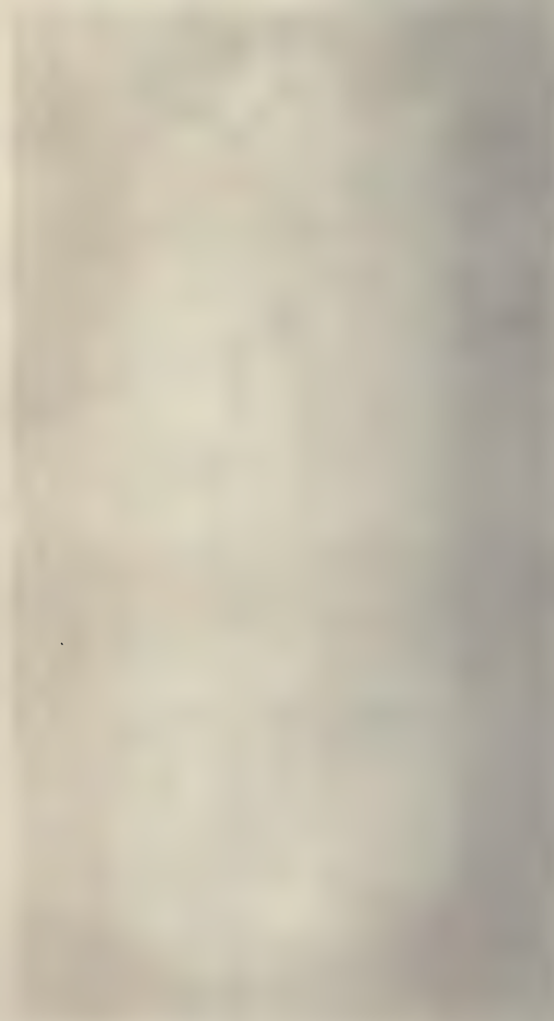




Fig. 1

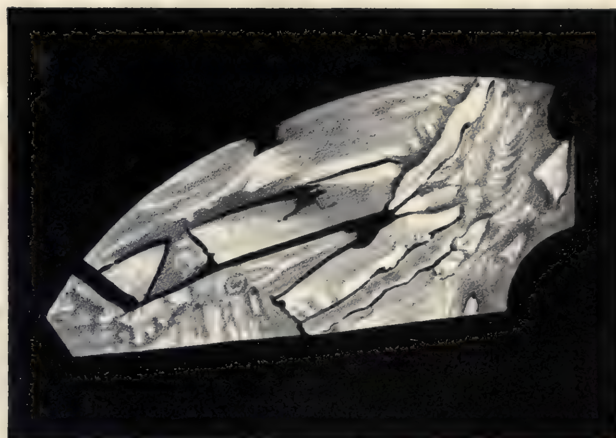


Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.

H M. Adriaans ad nat. del

Lith. v. Meijer & C° Amst.

A. J. Wendel in lap. del.



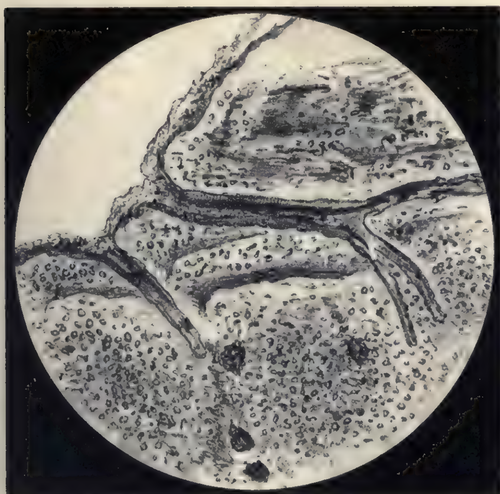


Fig. 1. $\frac{1}{38}$.

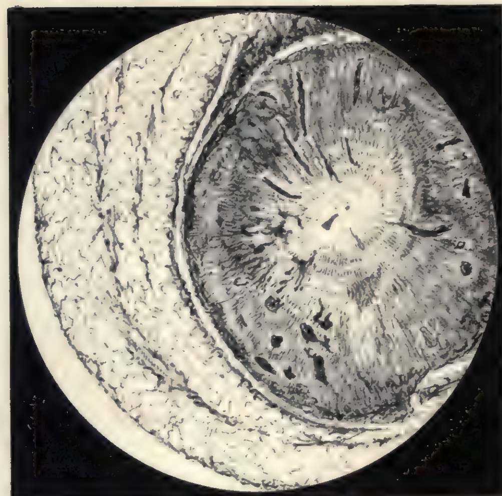
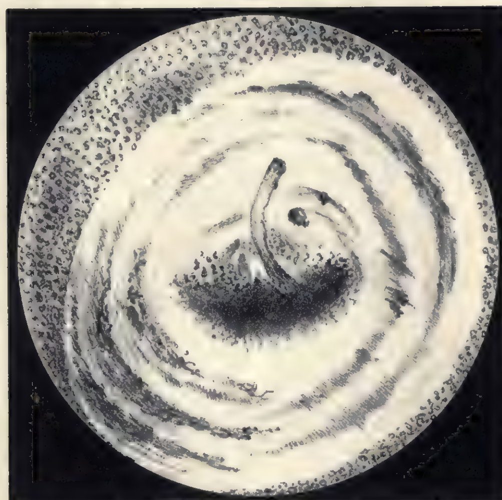


Fig. 2. $\frac{1}{30}$.

Fig. 3. $\frac{1}{38}$



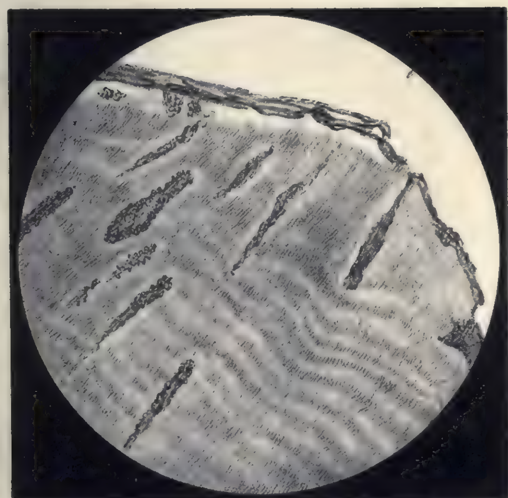


Fig. 4. $\frac{1}{38}$

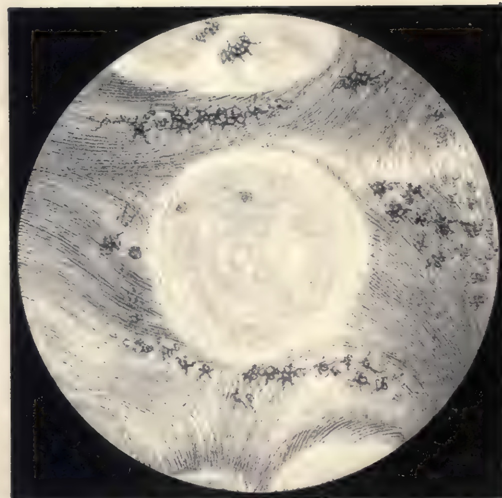


Fig. 5. $\frac{1}{38}$.

H. M. Adriaans en T. Hooiberg ad nat. del.

Lith. v. Meijer & C° Amst.

A. J. Wendel in lap. del.

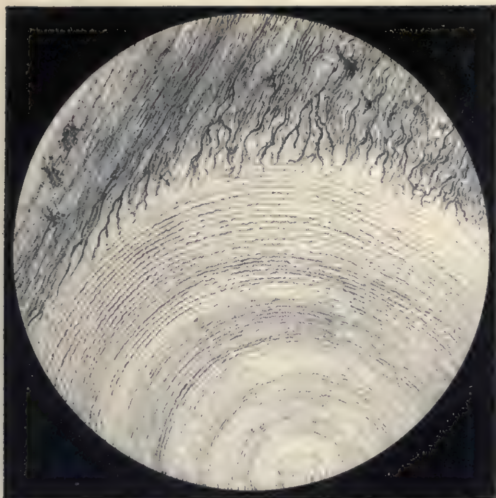


Fig. 1. 1/116.

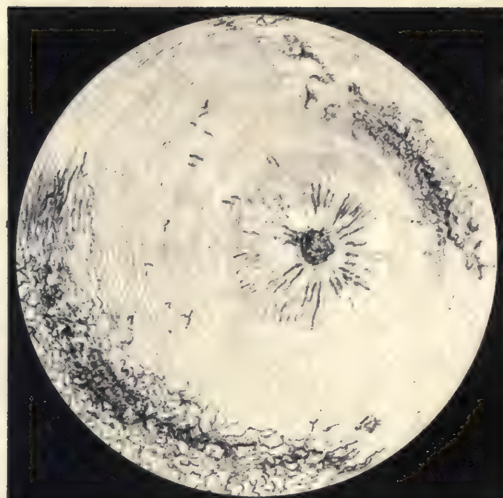
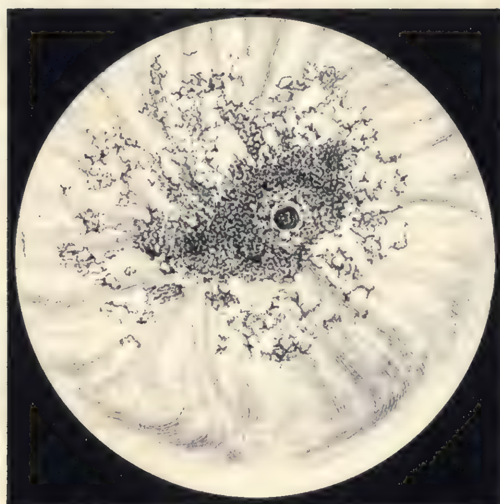


Fig. 2. 1/104.

Fig. 3. 1/38.



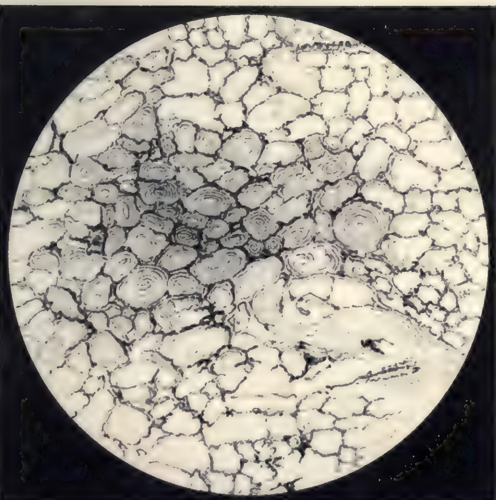


Fig. 4. 1/200.

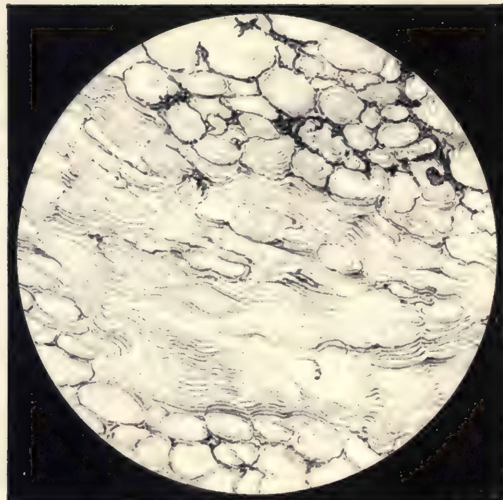


Fig. 5. 1/200.

H. M. Adriaans en T. Hooiberg ad nat. del

Lith. v. Meijer & Co. Amst.

A. J. Wendel in lap. del.

0